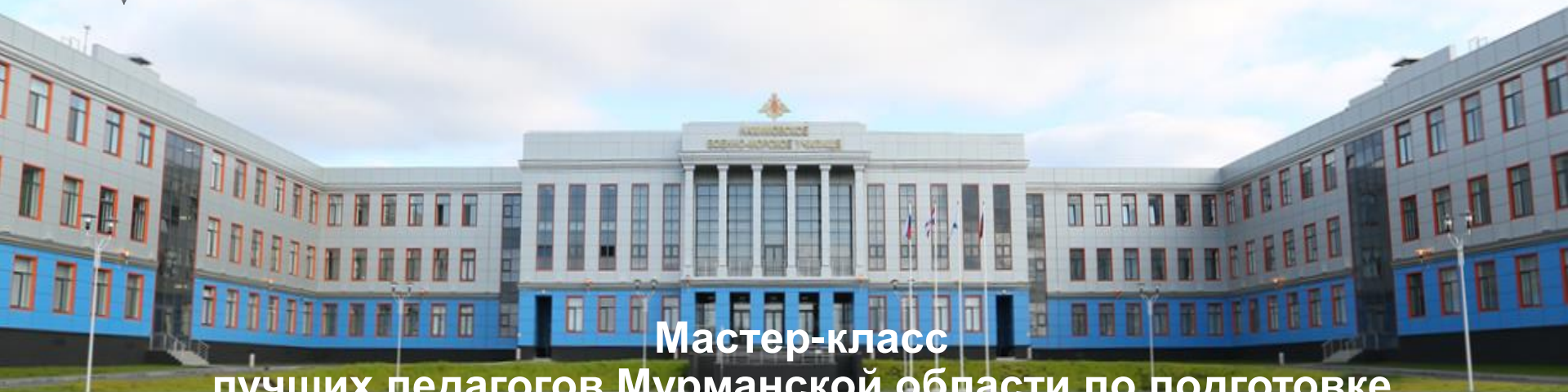




филиал федерального государственного казенного общеобразовательного учреждения
«Нахимовское военно-морское училище Министерства обороны Российской Федерации» в г. Мурманске



**Мастер-класс
лучших педагогов Мурманской области по подготовке
обучающихся к ГИА по математике**

«Методика подготовки обучающихся к решению геометрических задач ОГЭ на доказательство»

26.09.2024 г.


Мурманск 2024

Иванова Т.И., преподаватель
ОД математики и информатики
НВМУ в городе Мурманске
Иванова Т.И


Задания второй части ОГЭ
направлены на проверку владения материалом
на повышенном уровне.

Их назначение – дифференцировать хорошо
успевающих школьников по уровням
подготовки, выявить наиболее подготовленную
часть выпускников, составляющую
потенциальный контингент профильных
классов.


Методы решения геометрических задач



геометрический —
утверждение выводится
с помощью логических
рассуждений из ряда
известных теорем и их
следствий;



комбинированный — когда на одних
этапах решение ведется
геометрическим методом, а на
других — алгебраическим.



алгебраический —
геометрическая
величина вычисляется
на основании
различных
зависимостей между
элементами
геометрических фигур
непосредственно или с
помощью уравнений;

Геометрические задачи второй части ОГЭ

Задача 23

(на вычисление)

направлена на
проверку умения
решить
несложную
геометрическую
задачу на
вычисление.

Задача 24

(на
доказательство)

связана
со свойствами
треугольников,
четырехугольников,
окружностей

Задача 25

(геом. задача
повышенной
сложности)

требует свободного
владения
материалом и
довольно высокого
уровня
математического
развития, рассчитана
на обучающихся,
изучавших
математику более
основательно



Суть задачи на доказательство

Задача на доказательство — это утверждение, которое нужно доказать, используя различные теоремы, аксиомы, следствия и признаки геометрии.

Где мы встречаемся с доказательствами?

В ОГЭ доказательство находится в № 24 как самостоятельная задача, которая приносит 2 балла максимум

В ЕГЭ доказательства встречаются в пунктах а) в № 13 (стереометрическая задача) и № 16 (планиметрическая задача)

Трудности решения геометрических задач на доказательство

- ✓ Неалгоритмичность задач
- ✓ Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов
- ✓ Нужно решить довольно много задач, чтобы научиться их решать.

Причины ошибок в решении геометрических задач

1. Невнимательное чтение условия задачи.
2. Халатное построение чертежа (от руки, без чертежных инструментов).
3. Неправильный перенос данных задачи на чертеж (либо по незнанию, либо по небрежности).
4. Неумение проанализировать условие задачи и выявить неизвестные величины, возможность нахождения которых вытекает прямо из условия задачи.
5. Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем
6. Неумение применять формулы и теоремы к решению задач.
7. Несоблюдение этапов решения задачи.

Как научить школьника решать задачи на доказательство?

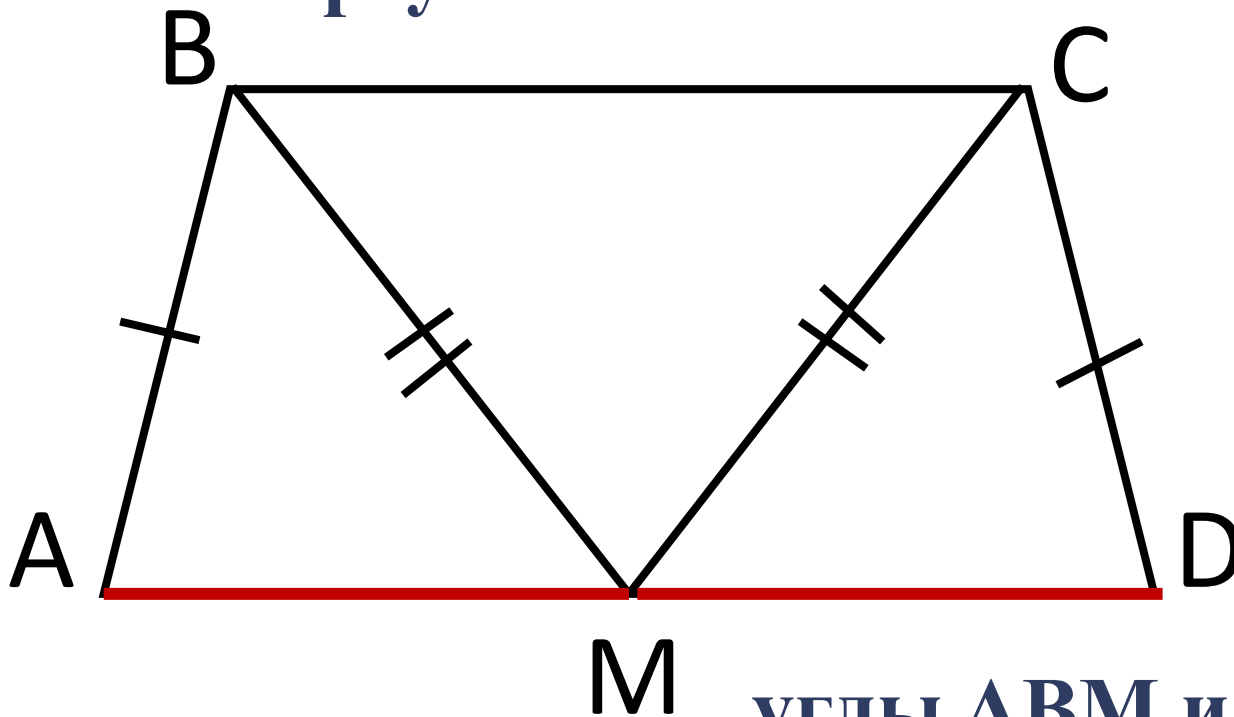
1. Построить чертеж;
2. Отметить на чертеже, что дано;
3. Отметить на чертеже, что нужно найти;
3. Построить логическую цепочку от того, что нужно найти до того, что дано;
4. Записать шаги доказательства.

Разбор задачи на доказательство

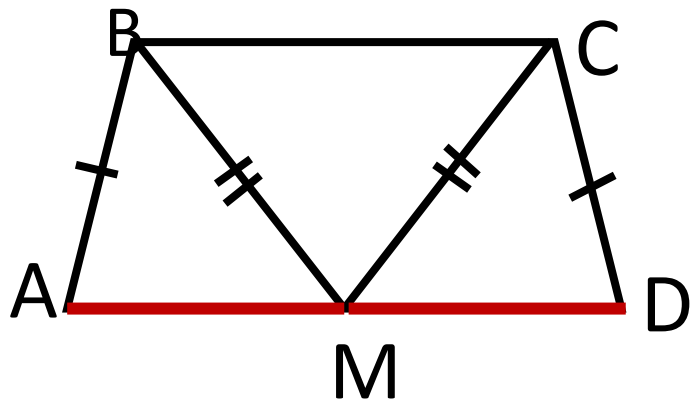
Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Точка M лежит на основании AD и равноудалена от концов другого основания. Докажите, что M – середина основания AD .

$$AM = MD?$$

треугольники ABM и MCD равны?



углы ABM и DCM равны



1. $BM = MC$ по условию, следовательно треугольник BMC — равнобедренный, значит углы MBC и MCB равны.

2. Углы ABC и BCD равны (*почему?*), как углы при основании равнобедренной трапеции $ABCD$.

Из п. 1) следует, что углы MBC и MCB равны, значит углы ABM и DCM равны (*почему?*), так как $ABM = ABC - MBC$,

а $DCM = BCD - MCB$.

3. $BM = MC$ по условию, $AB = CD$ (*почему?*), как боковые стороны равнобедренной трапеции, углы ABC и BCD равны по доказанному в п. 2), следовательно треугольники ABM и MCD равны (*почему?*) по двум сторонам и углу между ними (*очень важно указать признак, по которому треугольники равны*).

4. Так как треугольники ABM и MCD равны, то $AM = MD$.

Что и требовалось доказать.

Закрепление алгоритма доказательства

Чтобы доказать
равенство треугольников

```
graph TD; A[Чтобы доказать равенство треугольников] --> B[Две стороны и угол между ними]; A --> C[Сторона и прилеж. к ней углы]; A --> D[Три стороны];
```

*Две стороны и угол
между ними*

*Сторона и прилеж. к ней
углы*

Три стороны

Закрепление алгоритма доказательства

Чтобы доказать, что два отрезка равны, надо доказать, что равны треугольники, содержащие эти отрезки

Чтобы доказать
равенство треугольников

*Две стороны и угол
между ними*

*Сторона и прилеж. к ней
углы*

Три стороны

Закрепление алгоритма доказательства

Чтобы доказать, что два угла равны, надо доказать, что равны треугольники, содержащие эти углы

Чтобы доказать равенство треугольников

Две стороны и угол между ними

Сторона и прилеж. к ней углы

Три стороны

Чтобы доказать, что отрезок...будет биссектрисой, надо доказать, что угол...равен углу...

Чтобы доказать, что два угла равны, надо доказать, что равны треугольники, содержащие эти углы

Чтобы доказать равенство треугольников

Две стороны и угол между ними

Сторона и прилеж. к ней углы

Три стороны

Чтобы доказать, что отрезок...будет медианой,
надо доказать, что отрезок...равен отрезку...

Чтобы доказать, что два отрезка равны, надо
доказать, что равны треугольники, содержащие
эти отрезки

Чтобы доказать
равенство треугольников

*Две стороны и угол
между ними*

*Сторона и прилеж. кней
углы*

Три стороны

Чтобы доказать, что треугольник равнобедренный
надо...доказать....

Равенство сторон

Надо доказать, что равны
треугольники,
содержащие эти отрезки

Равенство углов

Надо доказать, что равны
треугольники,
содержащие эти углы

Чтобы доказать равенство треугольников

*Две стороны и угол
между ними*

*Сторона и прилеж. кней
углы*

Три стороны

Теорема – ключевая задача

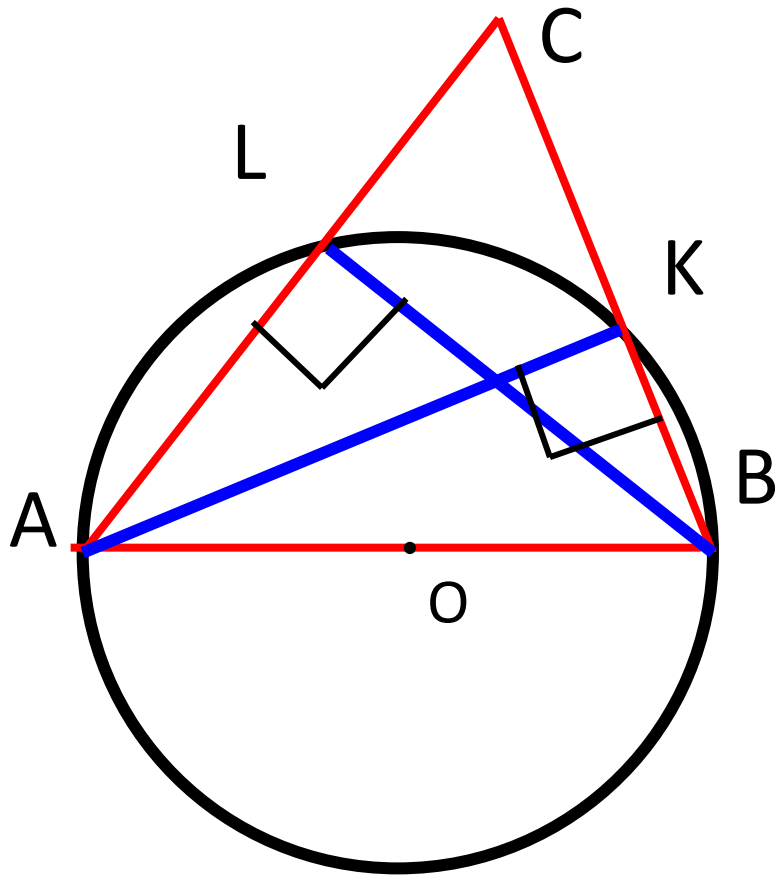
Математическая задача называется ключевой, если ее содержание либо метод ее решения используется при решении других задач .

Подбор ключевых задач позволяет быстро и рационально решать задачи.

Теорема – ключевая задача

Следствие из теоремы о вписанном угле

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, - прямой.

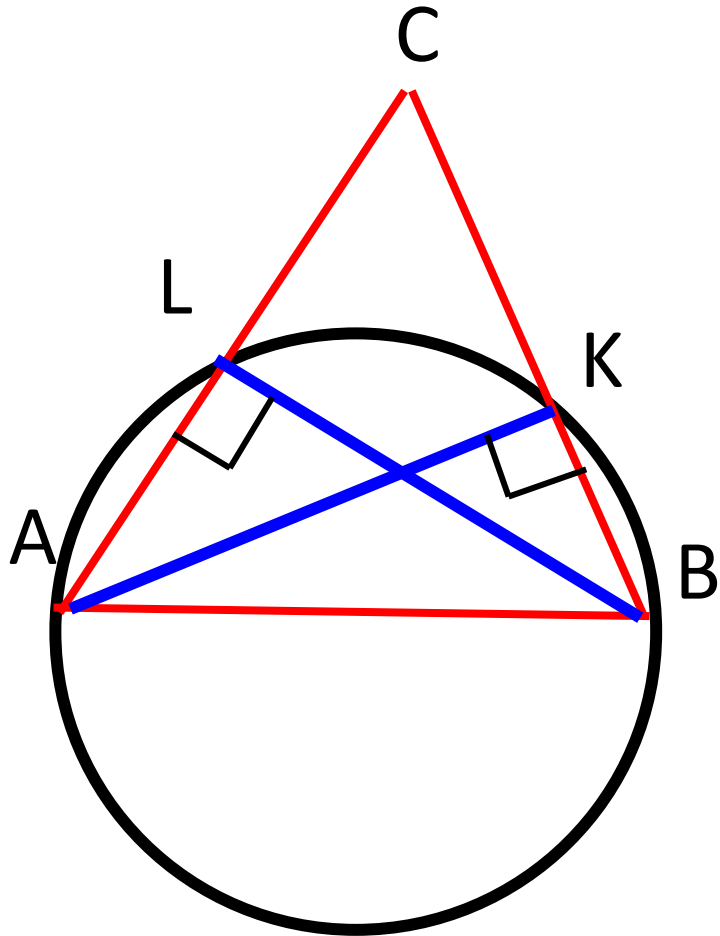


Задача 1. Докажите, что окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, пересекает две другие стороны в основаниях высот. (Задача взята из книги «ГИА 9 - 2019. Типовые тестовые задания». 30 вариантов. И.В.Ященко, С.А.Шестаков и др.)

Теорема – ключевая задача

Следствие из теоремы о вписанном угле

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, - прямой.



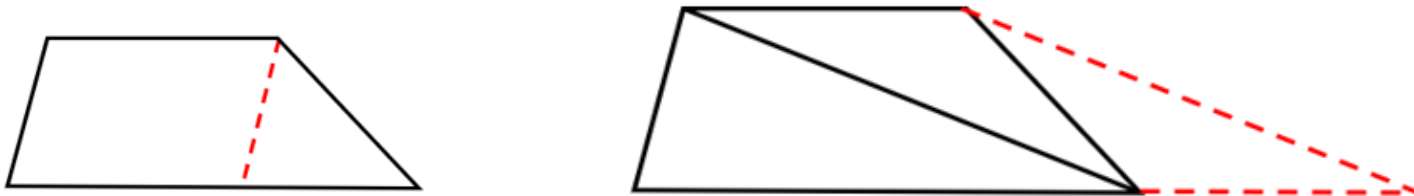
Задача 2.

В треугольнике ABC проведены высоты АК и BL. Докажите, что около четырехугольника ALKB можно описать окружность.

*Метод дополнительных
построений.*

Дополнительные построения в треугольнике

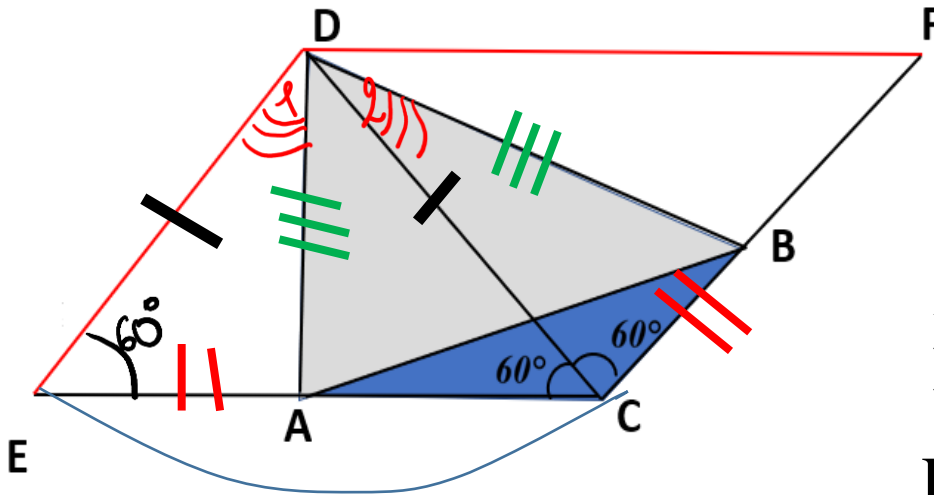
- Удвоение медианы треугольника
- Проведение параллельных сторонам треугольника прямых
- Проведение в трапеции высот из концов одного основания на другое
- Параллельный перенос боковой стороны или диагонали трапеции позволяет получить параллелограмм и треугольник.



- Проведение вспомогательной окружности

Проведение параллельных сторонам треугольника прямых с достраиванием фигуры до параллелограмма

Угол ACB треугольника ACB равен 120° . На биссектрисе этого угла отмечена точка D так, что $CD=AC+CB$. Доказать, что треугольник ADB равносторонний.



$EDFC$ - параллелограмм,
который будет ромбом (CD -
биссектриса). $\angle E = 60^\circ$

$\triangle EDC$ - равносторонний, значит
 $ED = EC = DC$.

$$\underline{EA} = EC - AC = CD - AC = \underline{CB}.$$

$$\triangle DEA = \triangle DCB \quad AD = DB. \quad \angle 1 = \angle 2$$

$$\angle ADB = \angle ADC + \angle CDB = \angle ADC + \angle EDA = 60^\circ.$$

Если в $\triangle ADB$, $AD = DB$, $\angle ADB = 60^\circ$, то $\triangle ADB$ - равносторонний

*О важности
доказательства при решения
вычислительных задач.*

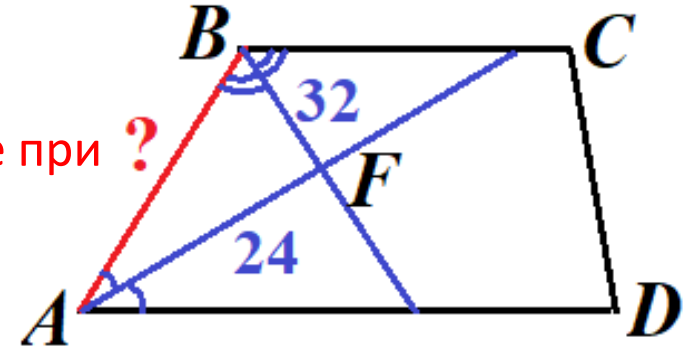
Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение.

1) У трапеции $ABCD$ основания $AD \parallel BC$

$\Rightarrow \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ односторонние при ?

2) Т.к. AF и BF – биссектрисы углов $\angle BAD$ и $\angle ABC$, то секущей AB



$$2\angle BAF + 2\angle ABF = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$$

3) Рассмотрим $\triangle ABF$, сумма углов треугольника равна 180° , $\Rightarrow \angle AFB = 180^\circ - \angle BAF - \angle ABF = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABF$ — прямоугольный с гипотенузой AB .

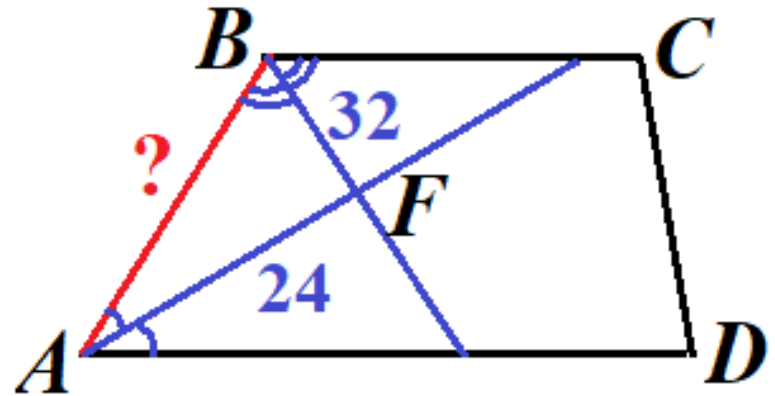
4) Найдём AB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$$

Ответ: 40.

Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение основано на свойстве биссектрис при боковой стороне трапеции, которое в ходе решения задачи **надо доказать**.

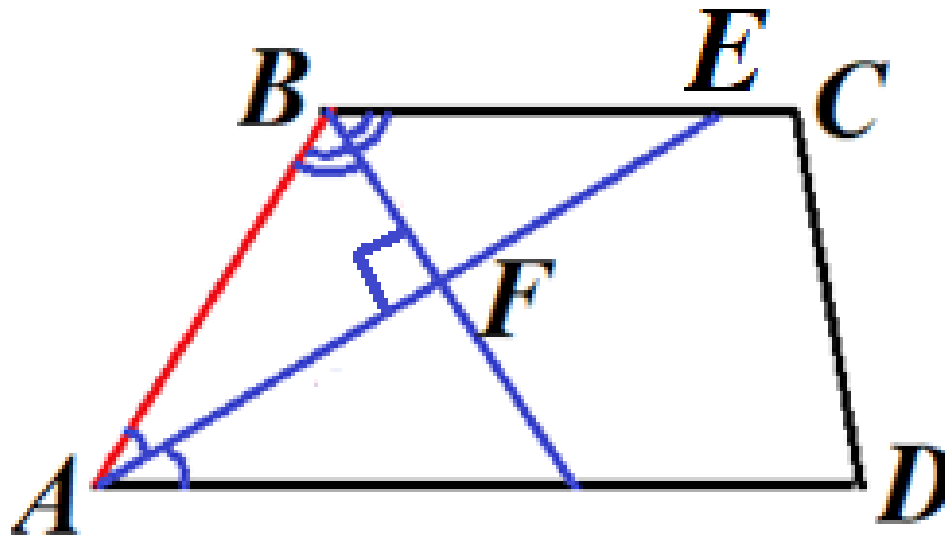


Используемые теоремы:

1. При пересечении параллельных прямых секущей сумма односторонних углов равна 180° .
2. Сумма углов треугольника равна 180° .
3. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

Применение теоретических фактов, требующих доказательства

- Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом 90° .



Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение.

1) У трапеции $ABCD$ основания $AD \parallel BC \Rightarrow \angle CBF = \angle FKA$ (накрест лежащие при секущей BK).

2) т.к. $\angle ABK = \angle AKB$, то

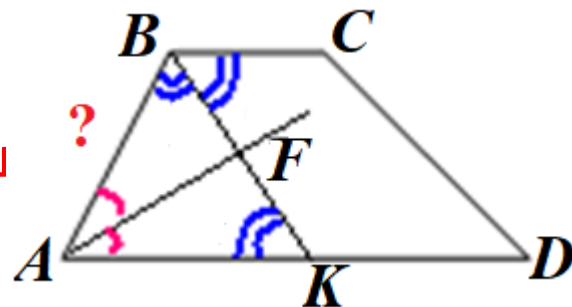
$\triangle ABK$ – равнобедренный с основанием BK (по признаку).

3) AF – биссектриса, проведённая к основанию BK равнобедренного $\triangle ABK$, то она является его высотой $\Rightarrow \triangle ABF$ – прямоугольный с гипотенузой AB .

4) Найдём AB по теореме Пифагора

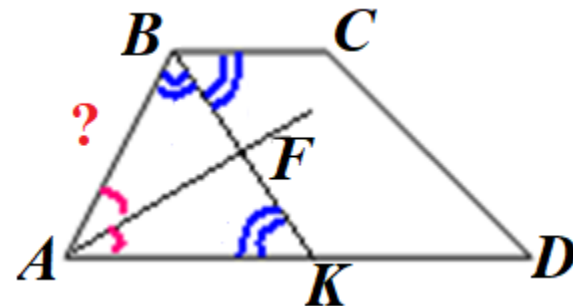
$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$$

Ответ: 40.



Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение основано на свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенного к основанию. В ходе решения задачи **надо доказать, что треугольник ABK равнобедренный.**

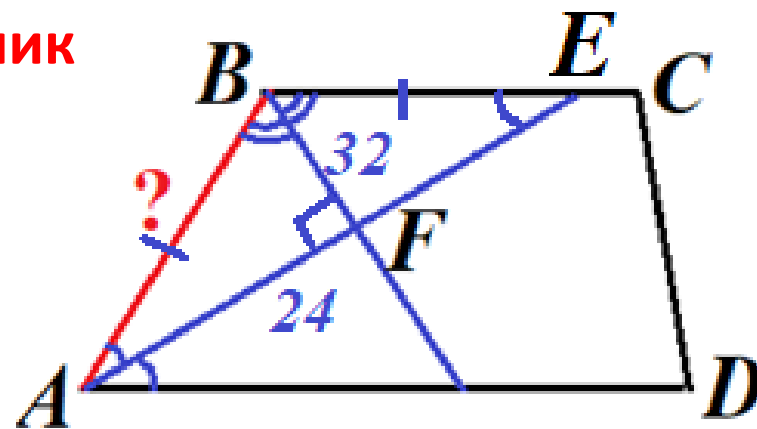


Используемые теоремы:

1. При пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.
2. Признак равнобедренного треугольника.
3. Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.
4. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F .
Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Надо доказать, почему треугольник ABE равнобедренный



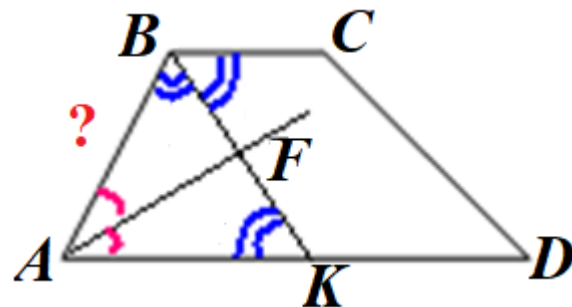
Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение.

- 1) У трапеции $ABCD$ основания $AD \parallel BC$
 $\Rightarrow \angle CBF = \angle FKA$ накрест лежащие при секущей BK .
- 2) Рассмотрим $\triangle ABF$ и $\triangle AKF$:
 $\angle ABF = \angle AKF$, $\angle BAF = \angle KAF$, т.к. сумма углов треугольника равна $180^\circ \Rightarrow \angle AFB = \angle KFA = 90^\circ$ (смежные)
 $\Rightarrow \triangle ABF$ – прямоугольный с гипотенузой AB .
- 3) По теореме Пифагора

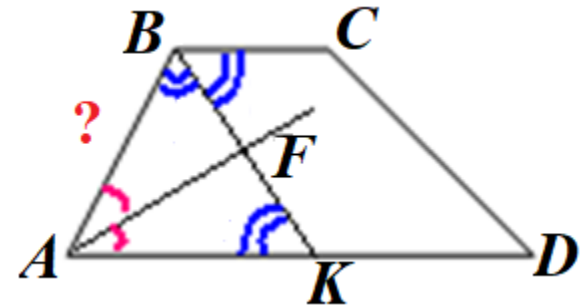
$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$$

Ответ: 40.



Задача № 23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение основано на равенстве смежных углов AFB и AFK , которое в ходе решения задачи **надо доказать**.



Используемые теоремы:

1. При пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.
2. Сумма углов треугольника равна 180° .
3. Сумма смежных углов равна 180° .
4. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

- ✓ Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (определения, аксиомы, теоремы, базовые задачи);
- ✓ Знание основных методов решения задач;
- ✓ Умение комбинировать методы решения задач;
- ✓ Наличие опыта решения задач .

Типичные ошибки:

- Невнимательное чтение условия и вопроса задания;
- неверное построения чертежа к задаче
- неполные доказательства утверждений;
- путаница между свойствами и признаками геометрических фигур;
- интуитивно понятные факты не доказываются, считаясь очевидными,
- сложности в записи математически грамотного и ясного решения, с пояснениями и обоснованиями.

Рекомендации

- Усилить внимание к геометрическим задачам на решение и доказательство.
- Необходимо обратить самое внимание на изучение геометрии непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение предмета.
- Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ОГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов.
- Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы» и т.д.;

Рекомендации

- Проводить диагностические работы по каждой единице содержания учебного материала, подлежащего повторному изучению и новому материалу.
- Учить выстраивать аргументацию при проведении доказательства;
- Учить записывать математические рассуждения, доказательства, обращая внимание на точность и полноту проводимых обоснований.
- Следует требовать от обучающихся умения оценивать решение задач по содержательным критериям, в том числе формулировать критерии оценки геометрических задач.

Спасибо за внимание!

Контактные данные:

ivanova0967@ya.ru