



филиал федерального государственного казенного общеобразовательного учреждения
«Нахимовское военно-морское училище Министерства обороны Российской Федерации» в
г. Мурманске

Мастер-класс
лучших педагогов Мурманской области по подготовке
обучающихся к ГИА по математике

«Типология и методология решения заданий
повышенного уровня сложности на ЕГЭ по
математике (профильный уровень):
приложения производной и первообразной» «

Казакова А.Л.,
преподаватель математики
филиала НВМУ в городе Мурманске

Мурманск
26.09.2024

Задание 8



- 1. В какой точке заданного отрезка функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение.
- 2. Найти количество точек максимума (или минимума) функции, принадлежащих заданному отрезку.
- 3. Найти количество точек экстремума функции, принадлежащих заданному отрезку.
- 4. Найти точку экстремума функции, принадлежащую заданному отрезку.
- 5. Найти промежутки возрастания (или убывания) функции и в ответе указать сумму целых точек, входящих в эти промежутки.
- 6. Найти промежутки возрастания (или убывания) функции. В ответе указать длину наибольшего из этих промежутков.
- 7. Найти количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой вида $y = kx + b$ или совпадает с ней.
- 8. Найти абсциссу точки, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Вопросы для повторения

1. Основные свойства функций. Возрастание и убывание, наибольшее и наименьшее значение.
2. Геометрический и физический смысл производной.
3. Правила нахождения производных. Сложная функция. Производная сложной функции
4. Связь между монотонностью функции и знаком ее производной.
5. Связь между графиком производной и свойствами самой функции.
6. Работа с функциями — умение находить производные, наибольшее и наименьшее значение и так далее.

Задание 12



- Задание 12 первой части Профильного ЕГЭ по математике — это нахождение точек максимума и минимума функции, а также наибольших и наименьших значений функции с помощью производной.

Типы задач могут встретиться в этом задании:

- *Нахождение точек максимума и минимума функций*
- *Исследование сложных функций*
- *Нахождение наибольших и наименьших значений функций на отрезке*
- Проверяемый навык — «уметь выполнять действия с функциями».

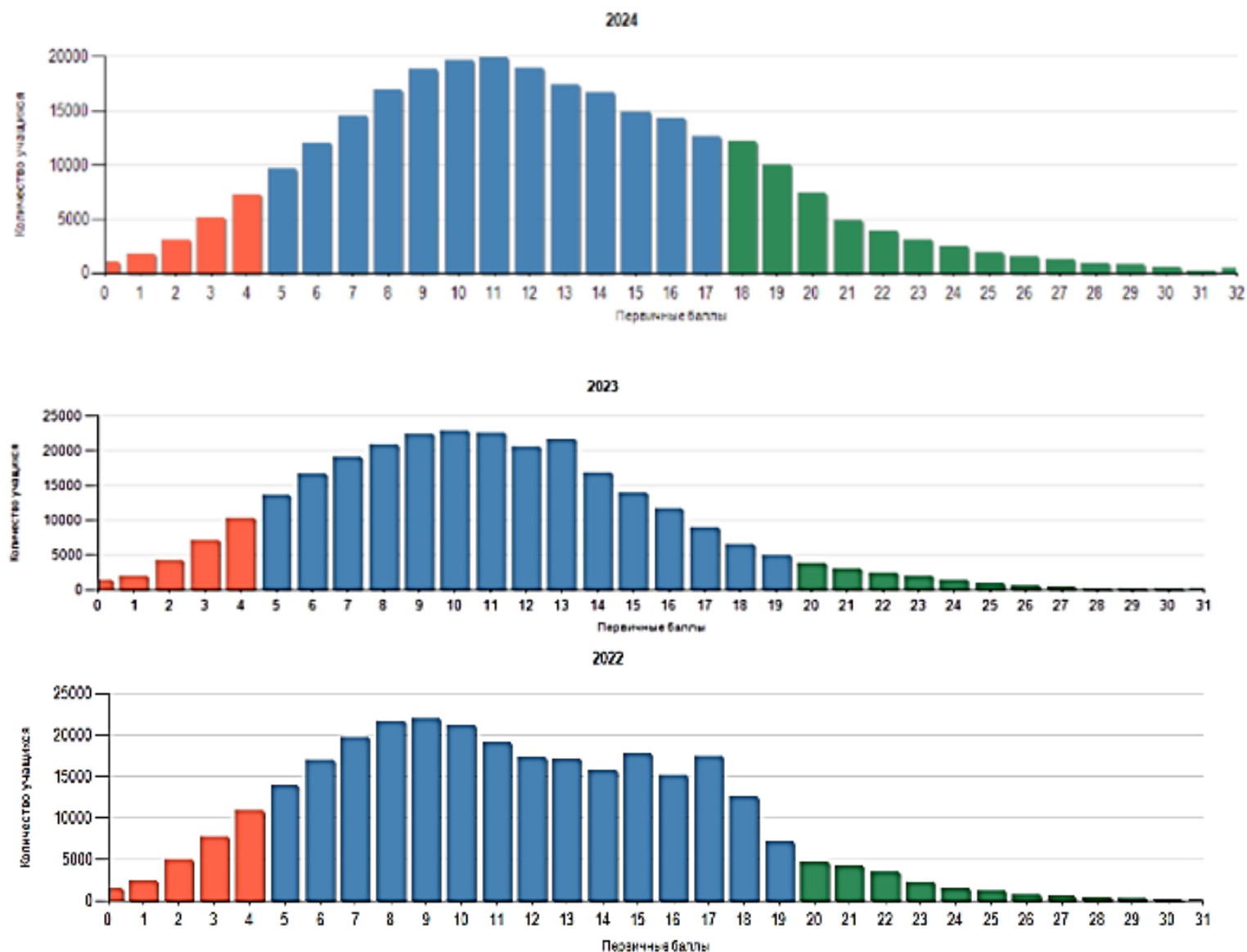


Рис. 1. Распределение первичных баллов ЕГЭ профильного уровня в 2022–2024 гг.

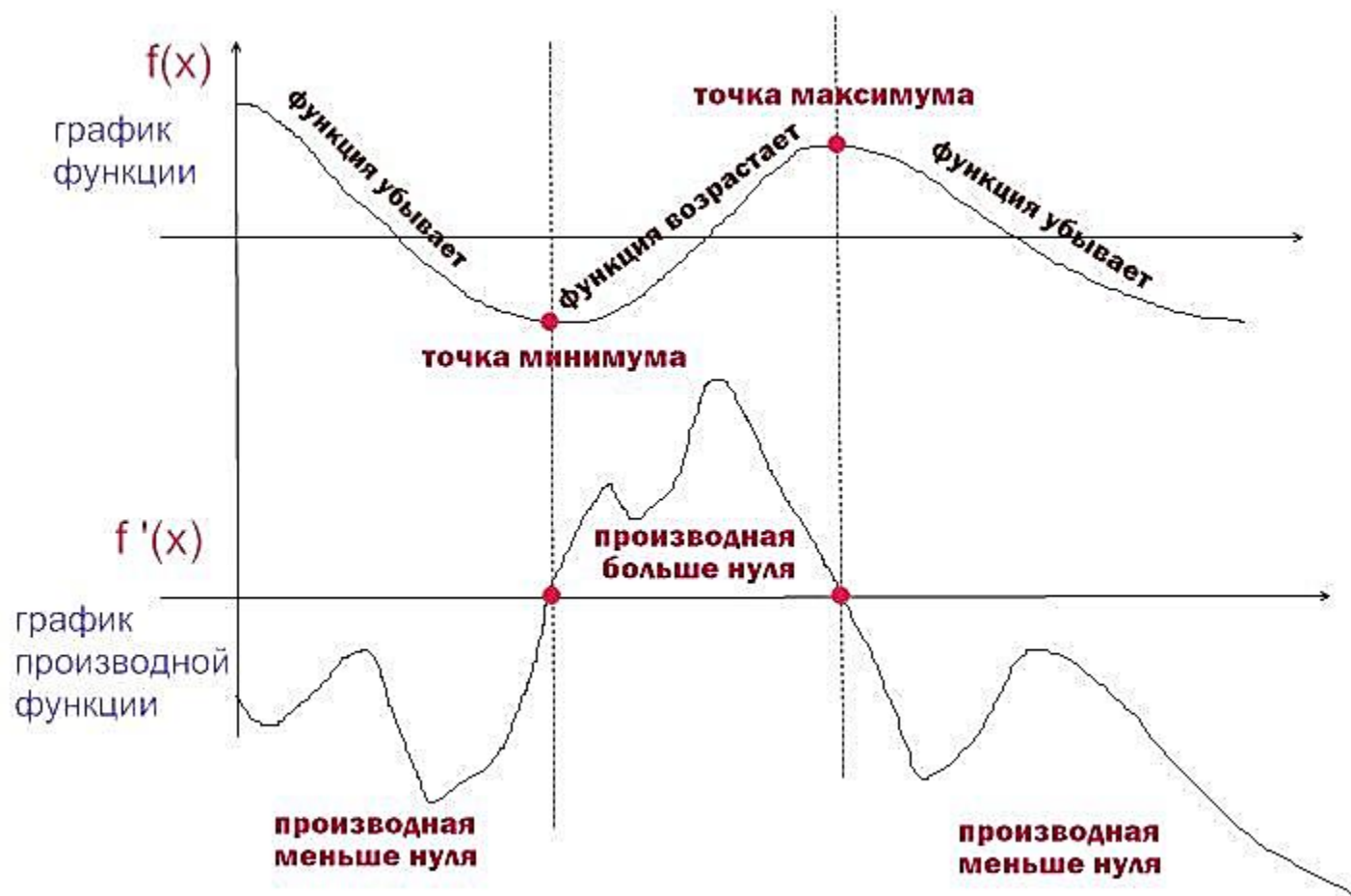
Основные трудности

- Задания 8 и 12 - материал курса алгебры и начал 10-11 классов, для освоения которого необходима достаточная база знаний программы основной школы, которой, к большому сожалению, нет сейчас у многих старшеклассников.
- Несмотря на невысокий уровень сложности самого задания, спектр проверки понимания темы «производная» в этом задании, к примеру, довольно широк – предлагаются и задачи на геометрический и механический смысл производной, и задачи с множеством ситуаций, описывающих связь между поведением функции и ее производной.
- Для решения большинства задач 8 требуется не просто непосредственно применить алгоритм (что можно сделать, например, при решении простейших уравнений), а самостоятельно проанализировать ситуацию и сделать вывод. Даже в случае крайней простоты анализа все это требует от старшеклассников некоторых усилий, к которым не все готовы.

Рекомендации

- Некоторые учащиеся путают график производной и график функции. Если это график производной функции, то рассматривать его нужно как бы «отражение» самой функции, которое просто дает нам информацию об этой функции.
- Ошибки у старшеклассников возникают из-за непонимания смысла производной. Многие считают, что если функция в какой-либо точке отрицательна, то и производная тоже, и наоборот. На самом деле это совсем не так.
- Не спешить находить производную — обратить внимание на свойства функции. Иногда для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции можно воспользоваться возрастанием или убыванием.
- Научиться строить график производной функции по заданному графику самой функции и наоборот. Это умение показывает глубину владения производными.

Зависимость производной от графика функции

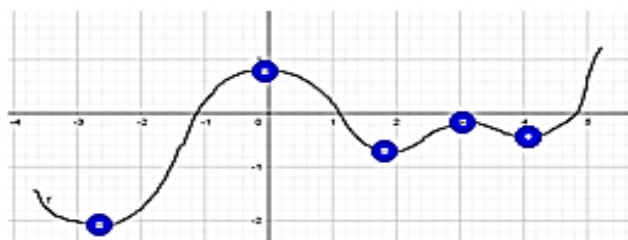


Экстремумы

график
функции



точки перегиба



точки max



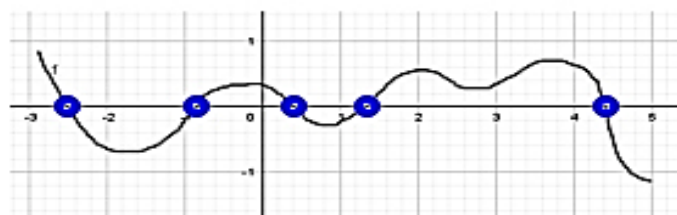
точки min



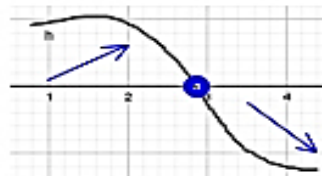
график производной
функции



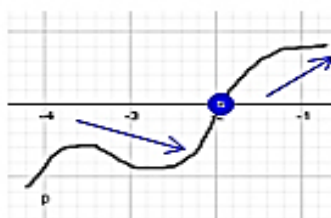
нули функции



точки max



точки min

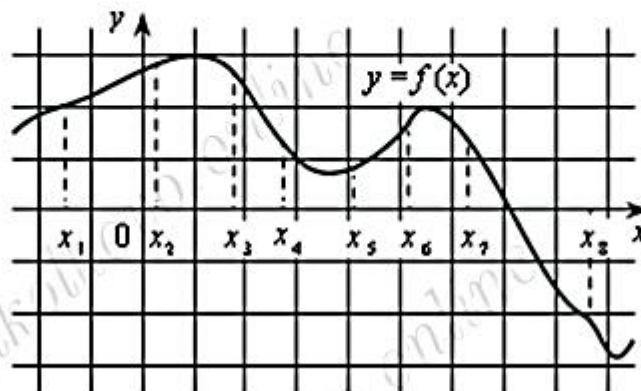


ЕГЭ по математике 01.06.2023.

Основная волна. Сибирь, Центр

7

На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



11

(Центр)

Найдите точку максимума функции $y = 7 + 15x - x\sqrt{x}$.

11

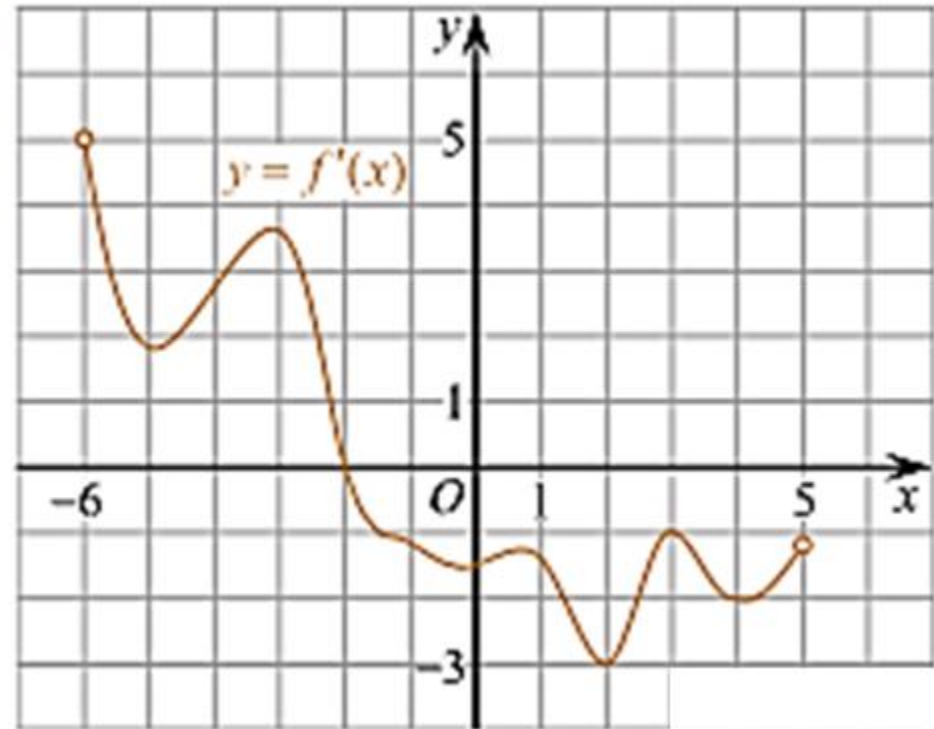
(Сибирь)

Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 9$ на отрезке $[1; 10]$.

ЕГЭ по математике 29.03.2024.

Досрочная волна. Дальний Восток

8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

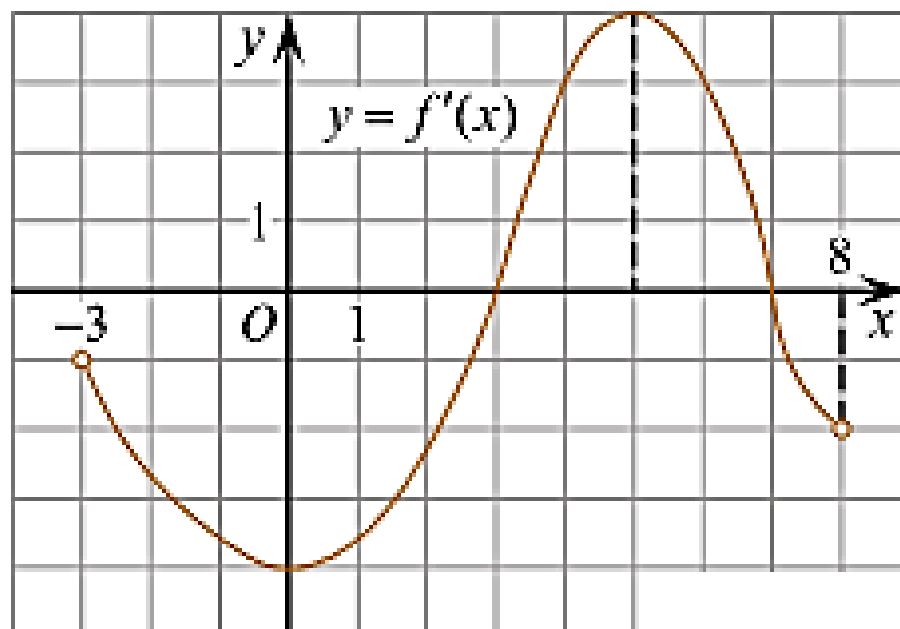


12. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 147x + 11$.

ЕГЭ по математике 29.03.2024.

Досрочная волна. Москва

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

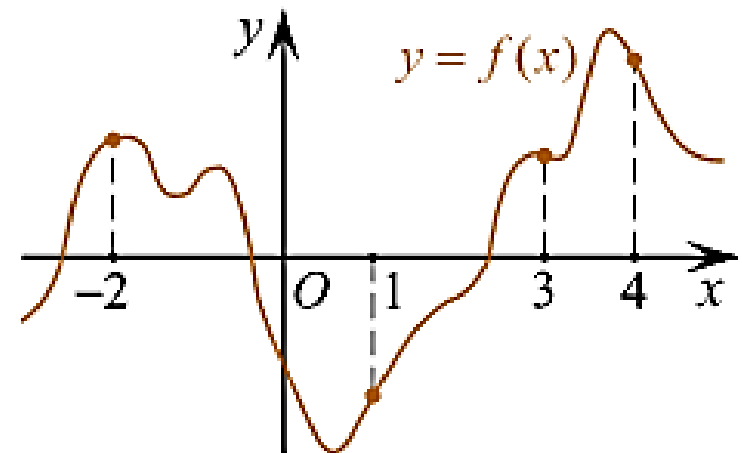


12. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

ЕГЭ по математике 31.05.2024.

Основная волна. Дальний Восток

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, 1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



12

Пример 1

Найдите точку максимума функции $y = 9 \cdot \ln(x - 4) - 9x - 7$.

Пример 2

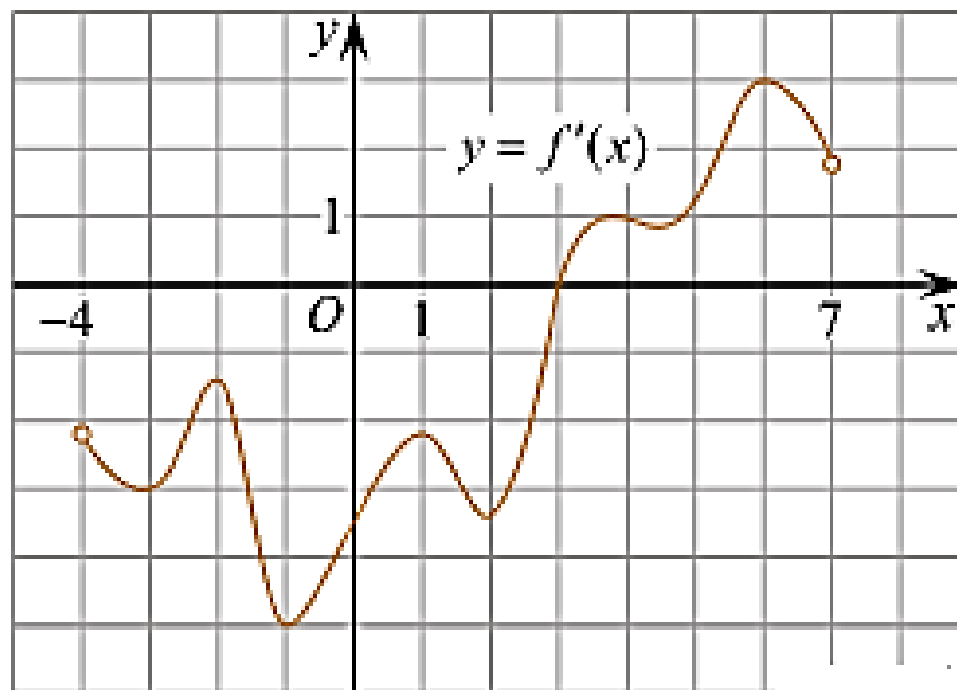
Найдите точку максимума функции $y = 3,5x^2 - 29x + 30 \cdot \ln x + 67$.

ЕГЭ по математике 31.05.2024.

Основная волна. Сибирь, Центр

8.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



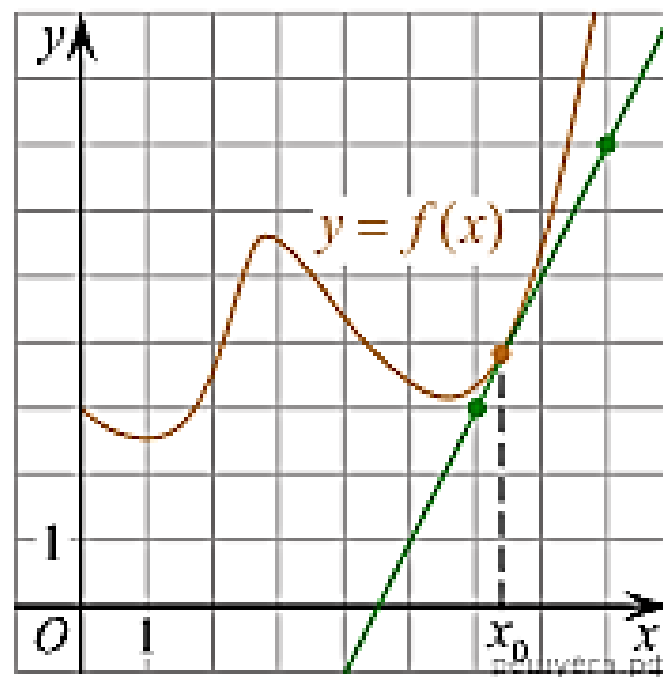
12. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x - 3) + 5$.

ЕГЭ по математике 20.06.2024.

Основная волна, резервный день.

Разные города

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



12. Найдите точку минимума функции $y = (1 - 5x) \cos x + 5 \sin x + 3$ принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Примеры заданий

1

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

Решение. Найдём определения функции:

$x^2 - 6x + 11 \geq 0, D = b^2 - 4ac = 36 - 44 = -8$. Это означает, что точек пересечения графика данной функции с осью Ox нет. Учитывая, что ветви параболы направлены вверх ($a = 1 > 0$), делаем вывод, что $x^2 - 6x + 11 > 0$ при любом значении x . $D(y) = R$.

Значит, точкой минимума параболы является абсцисса её вершины. Найдём её:

$x_{min} = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \in D(y)$. Так как исходная функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$ возрастающая, то её точка минимума совпадает с точкой минимума подкоренного выражения.

Ответ: 3

2

Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Решение. Найдём определения функции:

$x^2 - 6x + 13 \geq 0, D = b^2 - 4ac = 36 - 52 = -16$. Это означает, что точек пересечения графика данной функции с осью Ox нет. Учитывая, что ветви параболы направлены вверх ($a = 1 > 0$), делаем вывод, что $x^2 - 6x + 13 > 0$ при любом значении x . $D(y) = R$.

Значит, наименьшее значение функция $f(x) = x^2 - 6x + 13$ достигает в точке минимума, которой является абсцисса вершины параболы. Найдём её:

$x_{min} = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \in D(y)$. Тогда $f_{min} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 13 = 4$. Так как $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ является возрастающей функцией, то своё наименьшее значение принимает в той же точке, что и наименьшее значение подкоренного выражения. Значит, $y_{min} = \sqrt{4} = 2$.

. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$.

Решение. Данная функция возрастающая, т.к. основание степени больше 1, значит, наименьшее значение принимает в точке минимума функции $f(x) = x^2 + 2x + 5$. Т.к. $f(x)$ – квадратичная функция, графиком является парабола, у которой ветви направлены вверх, то точкой минимума её будет абсцисса вершины параболы. Найдём её:

$x_{min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$. Тогда наименьшее значение функции равно:

$$y(x_{min}) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^4 = 16$$

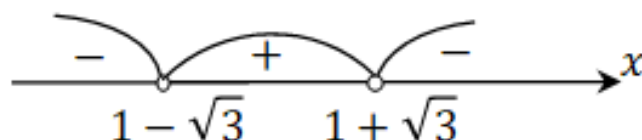
Ответ: 16

4

. Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$.

Решение. Найдём определения функции:

$$2 + 2x - x^2 > 0, D = b^2 - 4ac = 4 + 8 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}, \\ x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$



$$D(y) = (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$$

Графиком функции $f(x) = 2 + 2x - x^2$ является парабола с вершиной в точке $(1; 3)$, ветви направлены вниз, т.к. $a = -1 < 0$, значит, свой максимум эта функция достигает в точке $x = 1 \in D(y)$. Функция $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$ возрастающая, т.к. основание логарифма больше 1, поэтому её точка максимума совпадает с точкой максимума подлогарифмической функции, т.е. с точкой $x = 1$.

Ответ: 1

- 5 Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
- а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;
 - в) производная функции на промежутке $(-1; 1)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-4; -1)$ и $(1; 3)$ — отрицательные значения;
 - г) график функции имеет единственную касательную, параллельную оси абсцисс.

- 6 Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
- а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-1; 4]$;
 - в) функция возрастает на промежутке $[-1; 1]$, убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;
 - г) нули функции: -1 и 2 .

- 7 Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
- а) область определения функции есть промежуток $[-2; 4]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
 - в) $f'(x)$ положительна на $(-2; 0)$ и на $(3; 4)$, отрицательна на $(0; 3)$, равна нулю при $x = 0$ и при $x = 3$;
 - г) нули функции: -1 и 2 .

- 8 Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 41).
Укажите:
- а) область определения функции;
 - б) при каких значениях x $f(x) < -1$;
 - в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;
 - д) наибольшее и наименьшее значения функции.

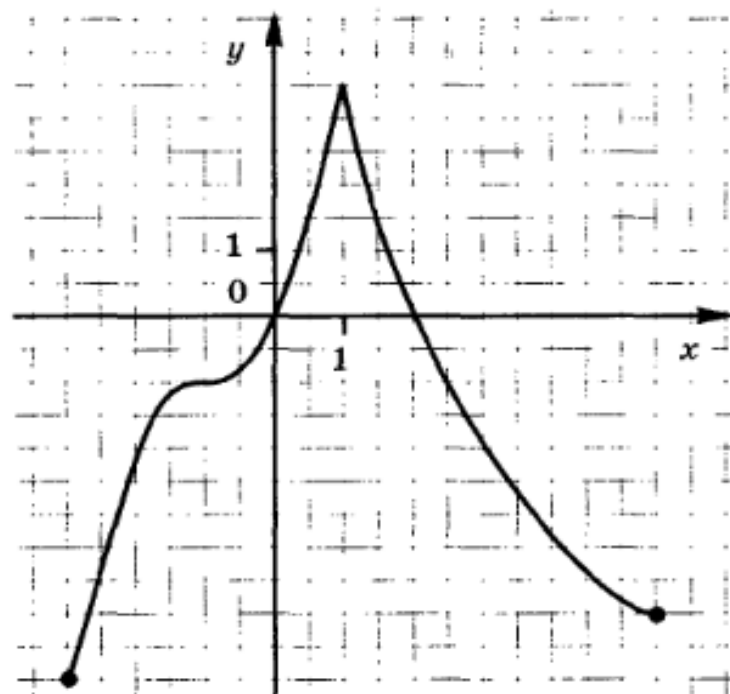
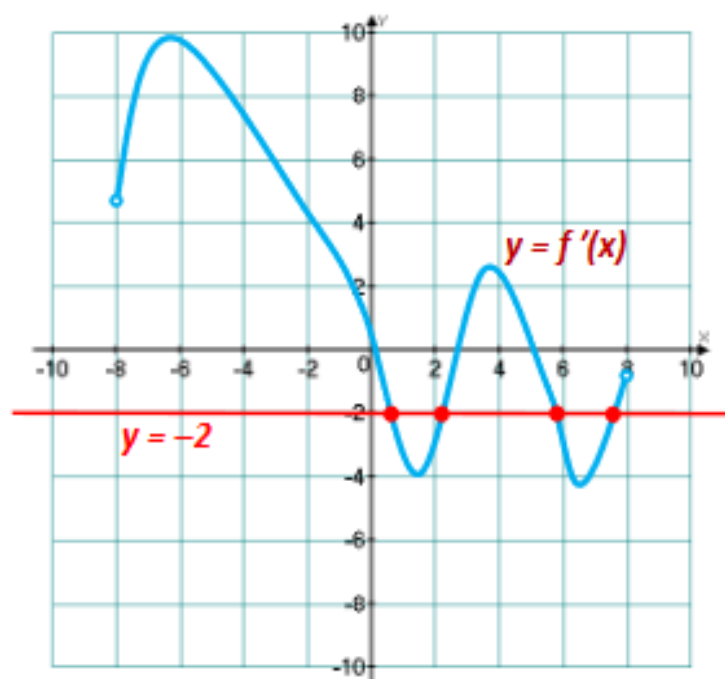


Рис. 41

На рисунке изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2$ или совпадает с ней.



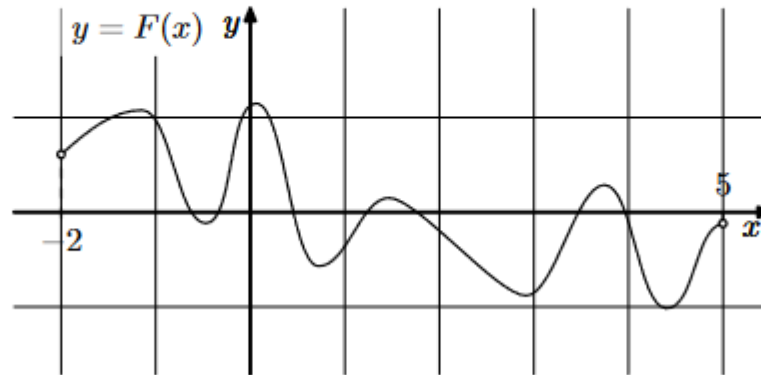
10

ПЕРЕФОРМУЛИРУЕМ ЗАДАЧУ...

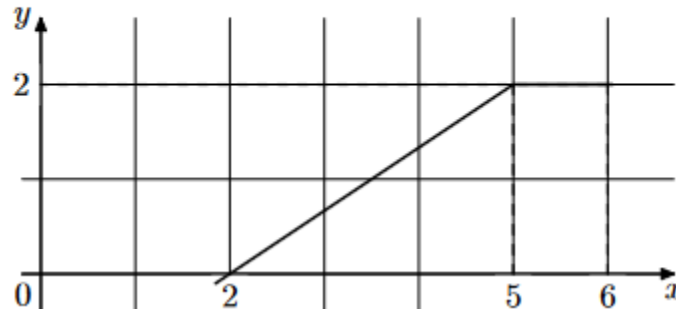
На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2$ или совпадает с ней.

Первообразная на ЕГЭ

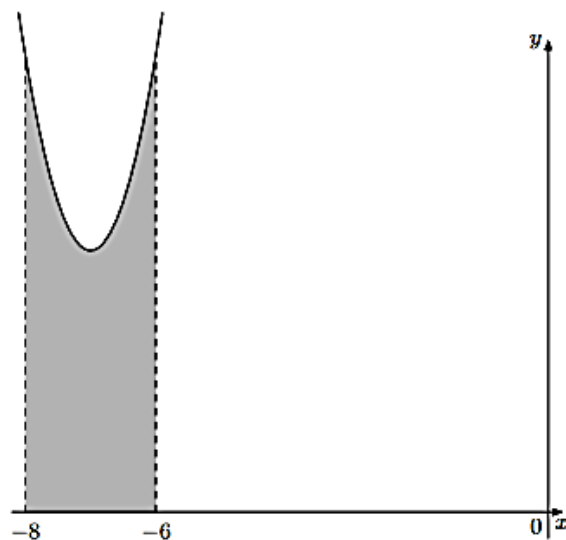
- 1 На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 4]$.



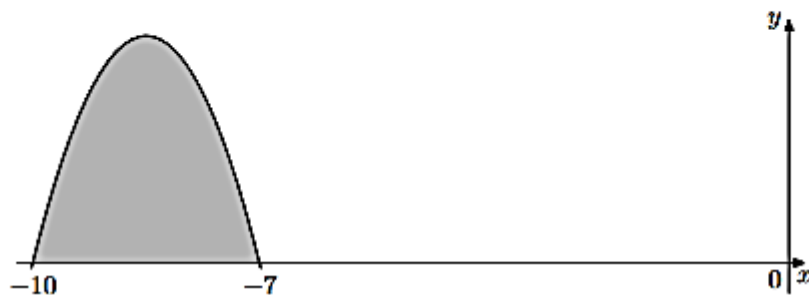
- 2 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



- 3 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 21x^2 + 151x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



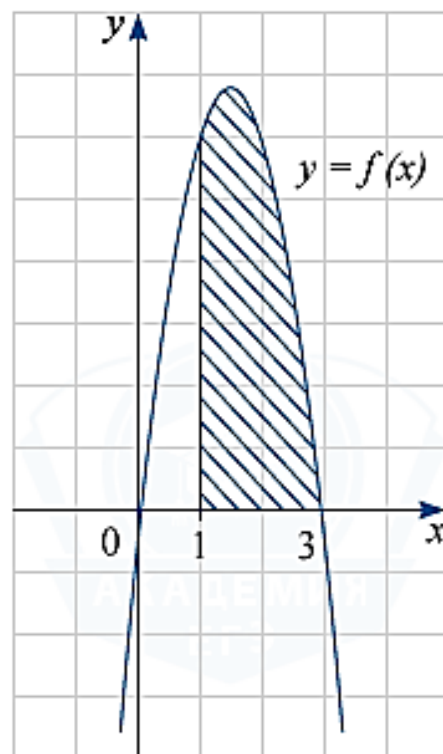
- 4 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

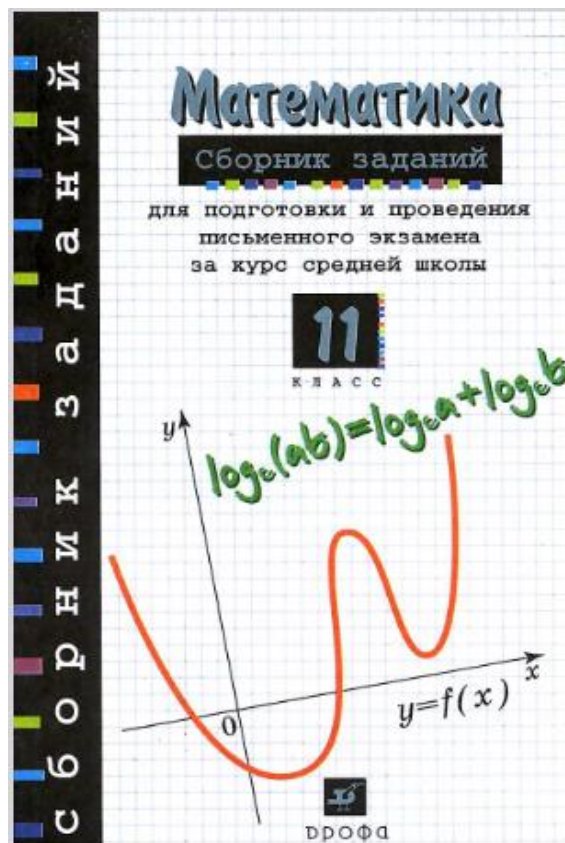


5

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 7$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.





Спасибо за внимание!

Контактные данные:

1.alenka@mail.ru