

Мастер-класс
лучших педагогов Мурманской области по подготовке обучающихся
к ГИА по математике

**«К вопросу о решении планиметрических
задач повышенного и высокого уровня
сложности при подготовке к итоговой
аттестации в форме ЕГЭ»**

26.09.2024 г.

Богомолова И.В., к.ф.-м.н., доцент, преподаватель
математики филиала НВМУ в г. Мурманске

ЕГЭ

Под редакцией
И. В. Ященко

2020

16

Профильный

Р. К. Гордин

**ГЕОМЕТРИЯ.
ПЛАНИМЕТРИЯ**

ФГОС

МАТЕМАТИКА

УДК 373.51
ББК 22.1я72
Г68

Гордин Р. К.
Г68 ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020. — 272 с.

ISBN 978-5-4439-1416-9

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2020. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 16 профильного уровня.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществлять контроль и самоконтроль знаний по планиметрии.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

12+

ISBN 978-5-4439-1416-9

© Гордин Р. К., 2020.
© МЦНМО, 2020.

Работа выполнена с использованием учебно-методического пособия
Гордина Р.К. ЕГЭ 2020.
Математика. Геометрия.
Планиметрия. Задача 16
(профильный уровень) / Под
ред. И. В. Ященко. — М.:
МЦНМО, 2020.—272 с.
ISBN 978-5-4439-1416-9

Критерии проверки и оценка решений задания 17

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Основные типы задач (17 задача ЕГЭ)

- Медиана прямоугольного треугольника.
- Параллелограмм. Средняя линия треугольника.
- Трапеция.
- Высоты и биссектрисы треугольника, точки их пересечения.
- Отношение отрезков.
- Отношение площадей.
- Касательная к окружности.
- Касающиеся окружности.
- Пересекающиеся окружности.
- Окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником.
- Пропорциональные отрезки в окружности.
- Углы, связанные с окружностью.
- Вспомогательные подобные треугольники

Основные методы решения

- При решении задач на трапецию во многих случаях полезны дополнительные построения, связанные с параллельным переносом боковой стороны или диагонали.
- Сочетание теоремы косинусов и свойства биссектрисы треугольника о том, что биссектриса треугольника разбивает его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
- Применение теоремы о пропорциональных отрезках (обобщённой теоремы Фалеса).
- Дополнительные построения, которые приводят к двум парам подобных треугольников.
- Метод вспомогательной окружности.
- В некоторых, часто непростых, задачах ключевая идея состоит в отыскании пары подобных треугольников.
- Удвоение медианы.
- Метод площадей.

Полезно знать

- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
- Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.
- Замечательное свойство трапеции. Теорема. Точка пересечения диагоналей любой трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.
- Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали—полусумме.
- Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.
- Биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника также пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон этих углов, поэтому она—центр окружности, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, т. е. центр вневписанной окружности треугольника. У каждого треугольника есть три вневписанных окружности.
- Если вписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M , то $AM = p - a$, где p —полупериметр треугольника ABC , а $a=BC$.
- Если окружность касается стороны BC треугольника ABC , продолжения стороны AB в точке N и продолжения стороны AC , то $AN = p$, где p —полупериметр треугольника.

Полезно знать

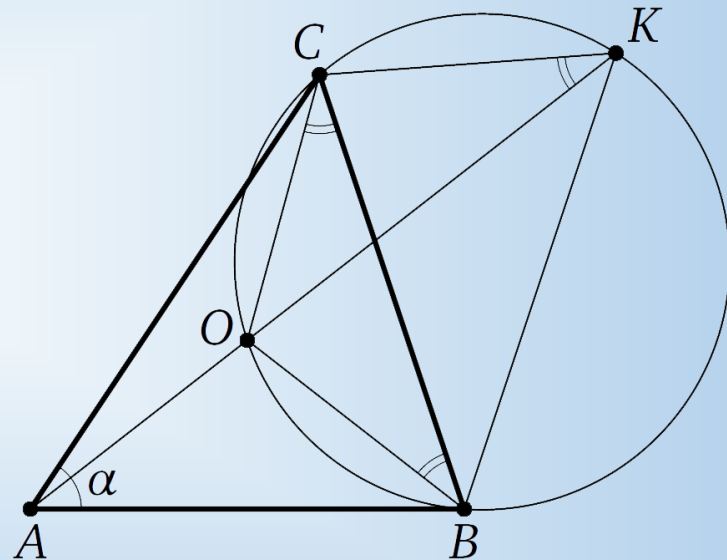
- Если p — полупериметр треугольника, r — радиус его вписанной окружности, а ra — радиус невписанной окружности, касающейся стороны, равной a , то $S = pr$, (1), $S = (p-a)ra$. (2)
- Отметим некоторые важные свойства высот и точки их пересечения — ортоцентра треугольника (AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты непрямоугольного треугольника ABC , H — ортоцентр треугольника). Точки B , C , B_1 и C_1 лежат на одной окружности, причём BC — её диаметр. Треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACC_1 . $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$. Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC , причём коэффициент подобия равен $|\cos \angle A|$.

Расстояние от точки H до вершины треугольника вдвое больше расстояния от центра O описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине $\angle BAN = \angle CAO$. $OA \perp B_1C_1$. Точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности треугольника.

- Другие полезные факты приведены в пособии, на которое мы ссылаемся в начале презентации.

Задача №1

- Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K . Известно, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.
- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если известно также, что $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ и $BC = 48$.

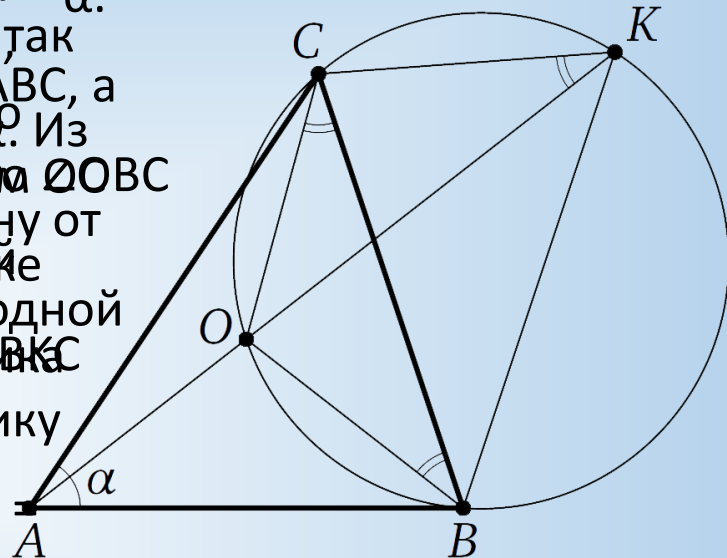


Решение

- а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle OKC = \angle AKC = 90^\circ - \alpha$.
- б) Поскольку OC — центральный угол дуги BC окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а $\angle BAC = \alpha$ — вписанный, получаем, что $\angle BOC = 2\alpha$. Из равнобедренного $\triangle BOC$ находим $\angle OBC = 90^\circ - \alpha$. Из точек B и K , лежащих по одну сторону от прямой OC , отрезок OC виден под одним и тем же углом $90^\circ - \alpha$. Значит, точки O, B, K и C лежат на одной окружности с диаметром CK , описанной около $\triangle BOC$. Применяя теорему синусов к треугольнику

$$OCK, \text{ находим, что } R = \frac{OC}{2\sin\angle OKC} = \frac{OC}{2\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$= \frac{OC}{2\cos\alpha} = \frac{30}{2 \cdot \frac{3}{5}} = 25.$$



Ответ: 25.

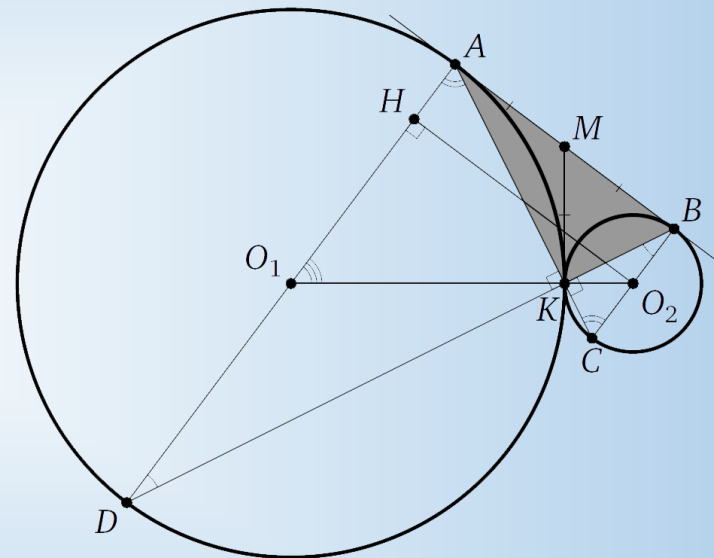
Задача для самостоятельного решения

- Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.
- а) Докажите, что $\angle OVK + \angle OCK = 180^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OVKS$, если $\cos \angle BAC = \frac{3}{15}$, а $BC = 120$.

Ответ: 84,5.

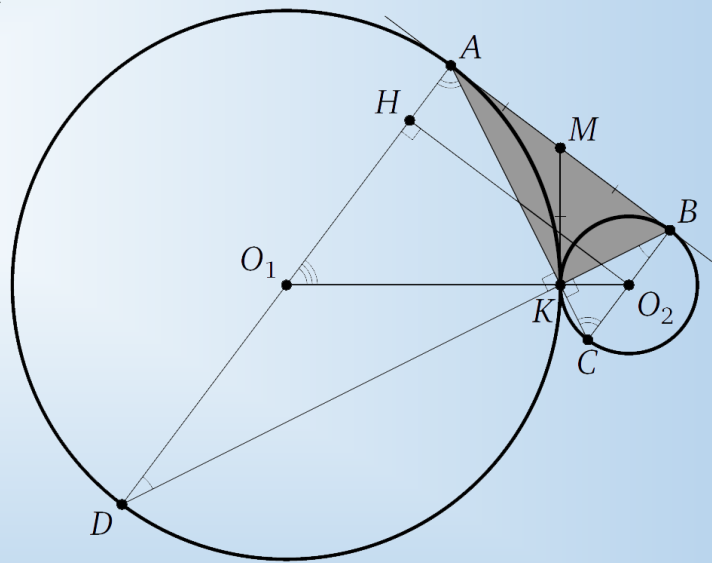
Задача №2

- Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .
- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение

- а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K , пересекает AB в точке M . По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный. Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD . Значит, $AD \perp AB$. Аналогично $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.



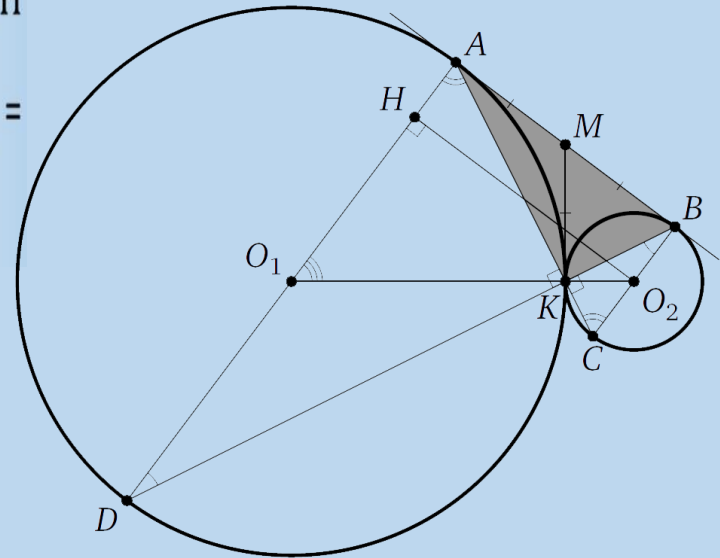
б) Пусть радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны 4 и 1 соответственно. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому $O_1O_2 = O_1K + KO_2 = 4 + 1 = 5$. Опустим перпендикуляр O_2H из центра второй окружности на диаметр AD первой. Из прямоугольного треугольника O_1HO_2 находим, что

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{(1+4)^2 - (4-1)^2} = \sqrt{25 - 9} = 4, \text{ а так как } ABO_2H$$

— прямоугольник, получаем, что $AB = O_2H = 4$. Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{AK}{AC} * S_{\triangle ABC} =$

$$= \frac{4}{5} * 4 = 3,2.$$

ОТВЕТ: 3,2



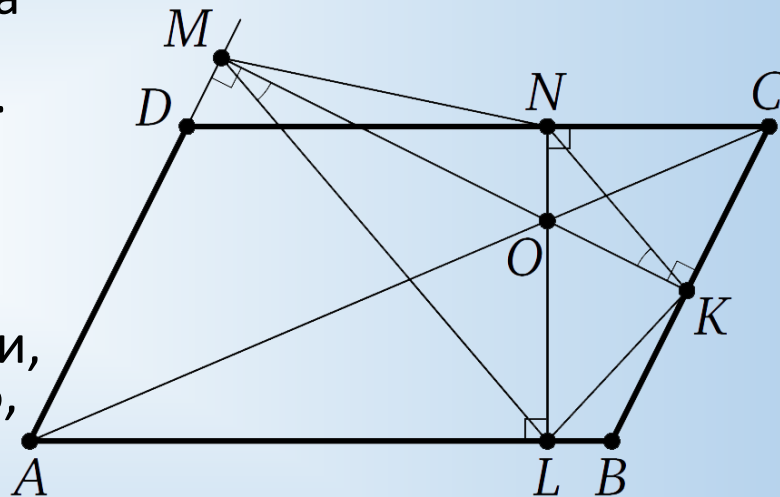
- Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C . К окружностям проведены общая внешняя касательная AB (A и B — точки касания).
- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AC = 10$ и $BC = 24$.

Ответ: $\frac{65}{12}, \frac{156}{5}$.

Задача для самостоятельного
решения

Задача №3

- На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.
- а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.
- б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60° .



Решение

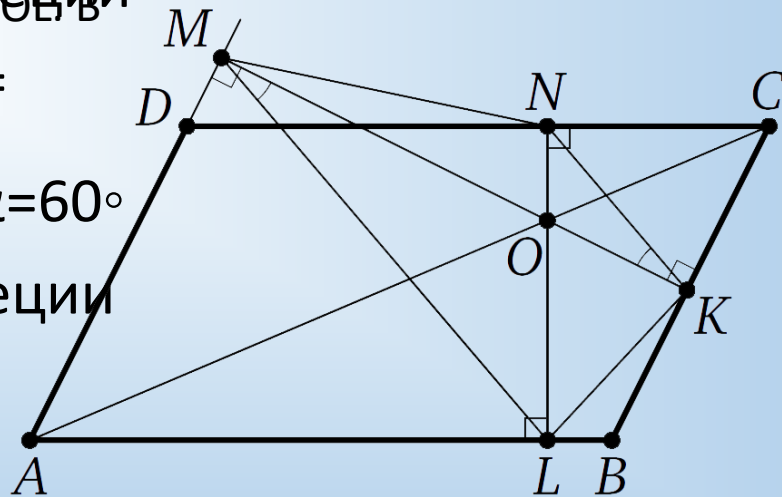
а) Обозначим площадь параллелограмма S , точку O , отличную от середины AC , и проведём через неё перпендикуляр к стороне AB . Угол между диагоналями NL и KM трапеции KO ML равен углу между перпендикулярами к диагоналям прямыми VS и SD , т.е. этот угол равен α . Поэтому площадь трапеции

$$= \frac{S * AD * AB \sin^2 \alpha}{2AD * AB} = \frac{S \sin^2 \alpha}{2}.$$

Подставляя $\alpha = 60^\circ$ и $S = 16$, получаем, что площадь трапеции

$$\text{равна } \frac{16 \sin^2 60^\circ}{2} = \frac{16 * 3}{8} = 6.$$

Ответ: 6.



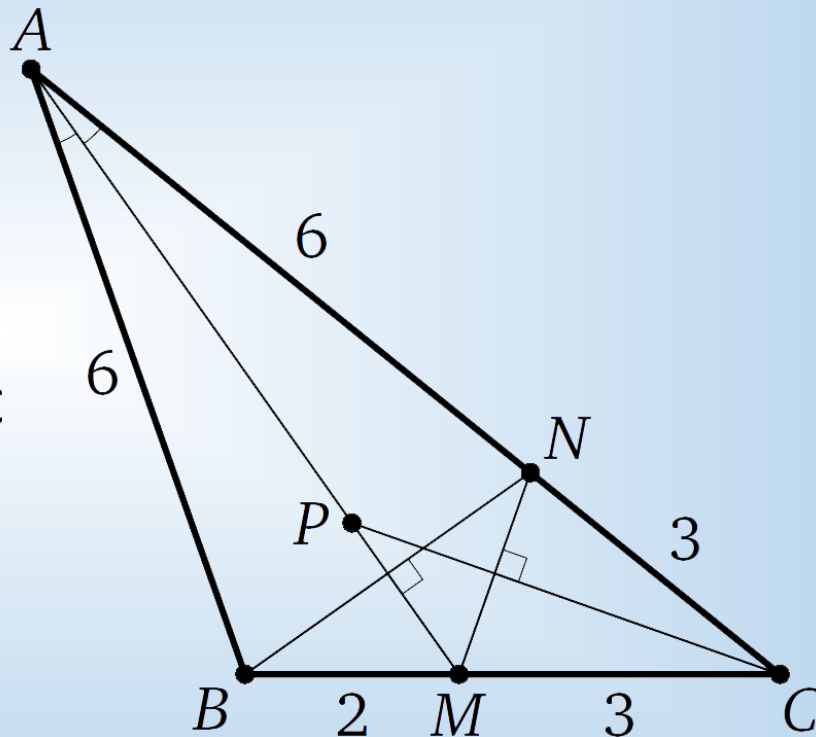
Задача для самостоятельного решения

- Из точки M , лежащей на диагонали параллелограмма $ABCD$, опустили перпендикуляры MK , MP , ML и MQ на стороны соответственно AB , BC , CD и AD (или их продолжения).
- а) Докажите, что треугольники KMP и LMQ равновелики.
- б) Найдите площадь параллелограмма, если один из его углов равен 30° , а площадь четырёхугольника $KPLQ$ равна 5.

Ответ: 40.

Задача №4

- В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB=6$, $BC=5$, $AC=9$.
- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
- б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

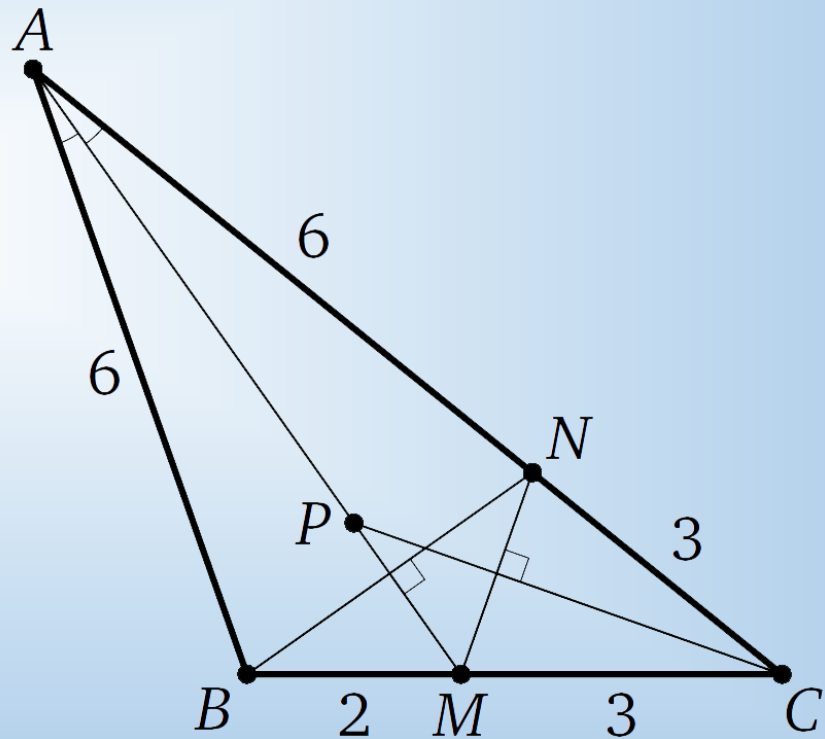


Решение

- а) По теореме о биссектрисе

треугольника $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, а так как

$BC = 5$, получаем, что $BM = 2$ и $CM = 3$. В треугольнике BAN биссектриса угла BAN перпендикулярна стороне BN , значит, этот треугольник равнобедренный. Поэтому $AN = AB = 6$, а $CN = AC - AN = 9 - 6 = 3 = CM$. В равнобедренном треугольнике CMN биссектриса, проведённая из вершины C , является медианой, следовательно, она делит основание MN пополам.

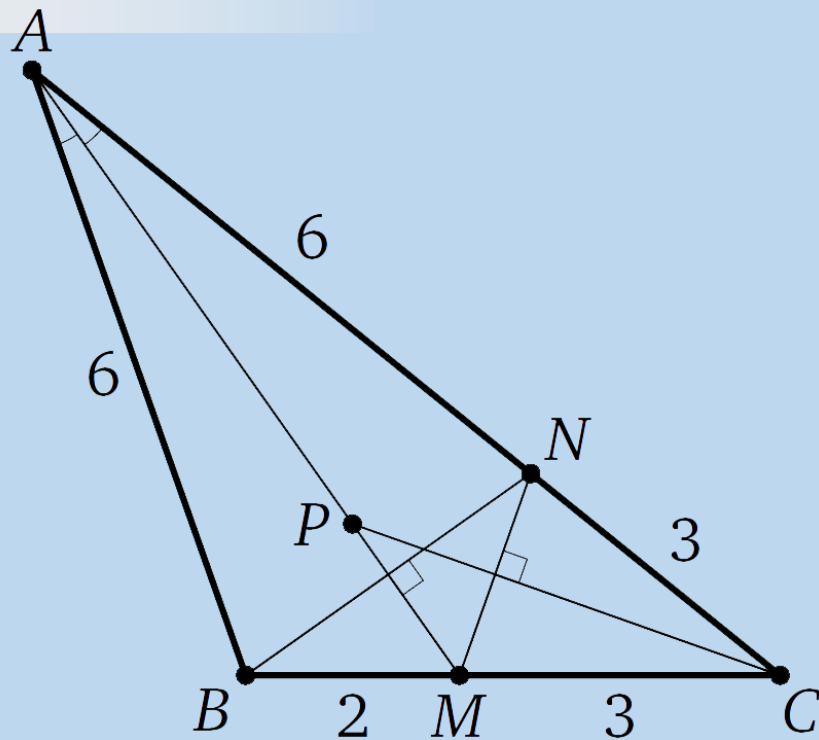


б) CP — биссектриса треугольника ACM , поэтому $\frac{AP}{PM} = \frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = 3$. Прямая

CP — серединный перпендикуляр к отрезку MN , поэтому $PN = PM$.

Следовательно, $\frac{AP}{PN} = \frac{AP}{PM} = 3$.

Ответ: 3.

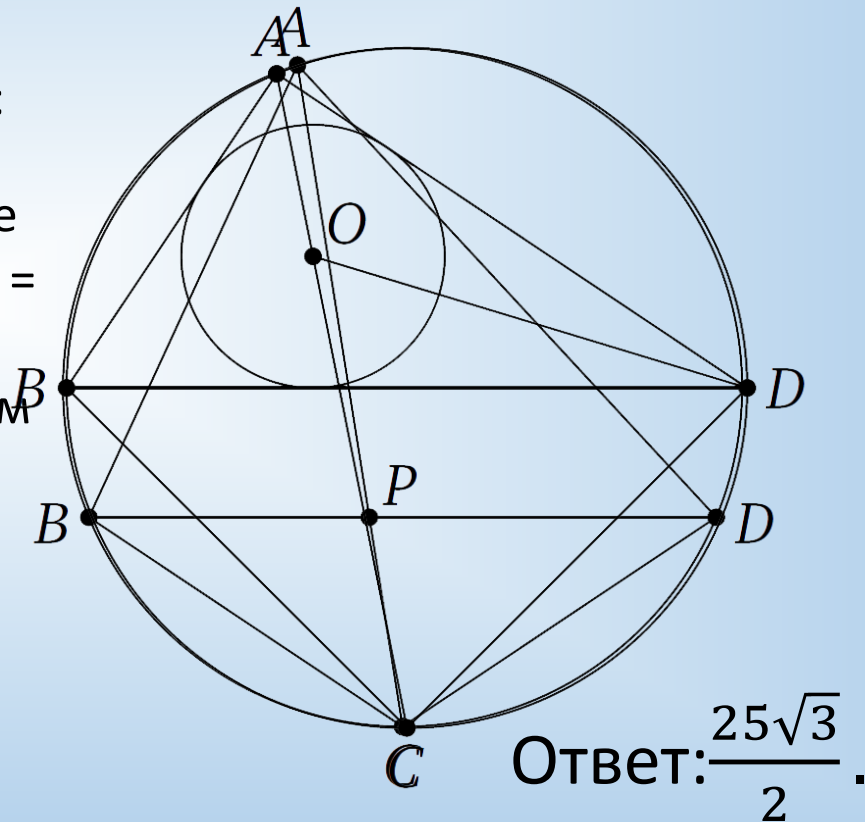


Задача №5

- Диагонали AC и BD четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.
- а) Докажите, что $AB:BC = AP:PD$.
- б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника ABCD окружности, $AB = 5$, а $BC = 5\sqrt{2}$.

Решение

- Центры окружностей W и W_1 в
только W и W_1 лежат на окружности W
поэтому они равны. Вписанные
углы $\angle ADB$ и $\angle ACB$ опираются на
биссектриса AC угла $\angle ADB$ и на биссектриса
 AB и $\angle CDB$ прямоуг. $\angle CDB$. Кроме
угла $\angle ADB$ $\angle ADB \neq \angle ACB$ $\angle ADB = 60^\circ$ $\angle ODC =$
того, по условию $\triangle BCD$
 $\angle ODB + \angle BDC = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$. Значит,
равны $\angle ADB$ и $\angle ODB$, поэтому $BD =$
 $\triangle BCD$ равнобедренный, причём
 $BC = BD = 10$. Катет AB прямоуг. \triangle
 $CD = BC = 5\sqrt{2}$. Следовательно, площадь
 $\triangle ABD$ равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin 30^\circ$
 $\triangle BCD$ равна $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin 45^\circ$
гипотенузы BD , поэтому $\angle ADB = 30^\circ$,
 $\angle ABD = 60^\circ$.



Задача для самостоятельно решения

- Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.
- а) Докажите, что $AB:BC = AP:PD$.
- б) Пусть BD — диаметр окружности, N — её центр, $AB = \frac{1}{2}BD$, а O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD . Найдите отношение площадей треугольников ADN и COD .
Ответ: 1:2.

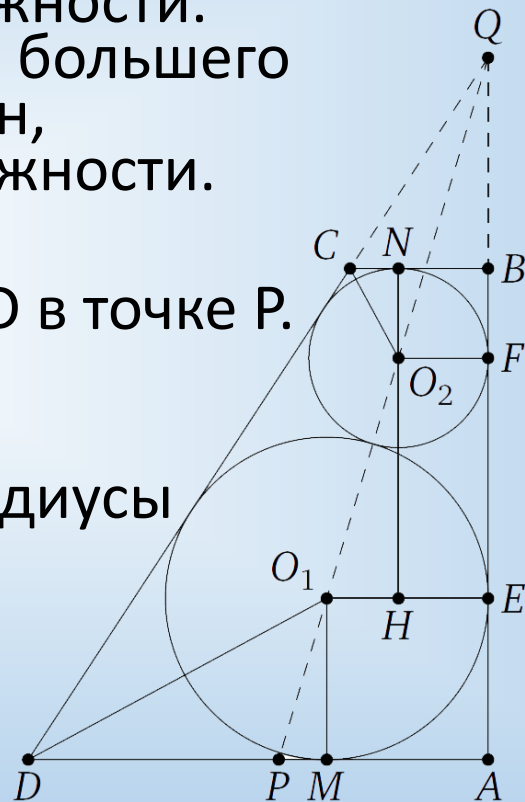
Задача №6

- В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

- а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P .

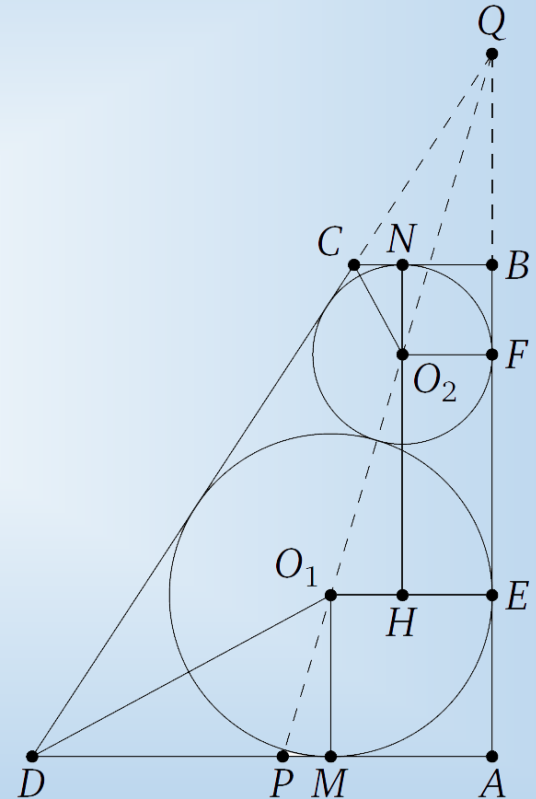
Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

- б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.



Решение

- а) Пусть продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке Q. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому точка Q, центры данных окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.



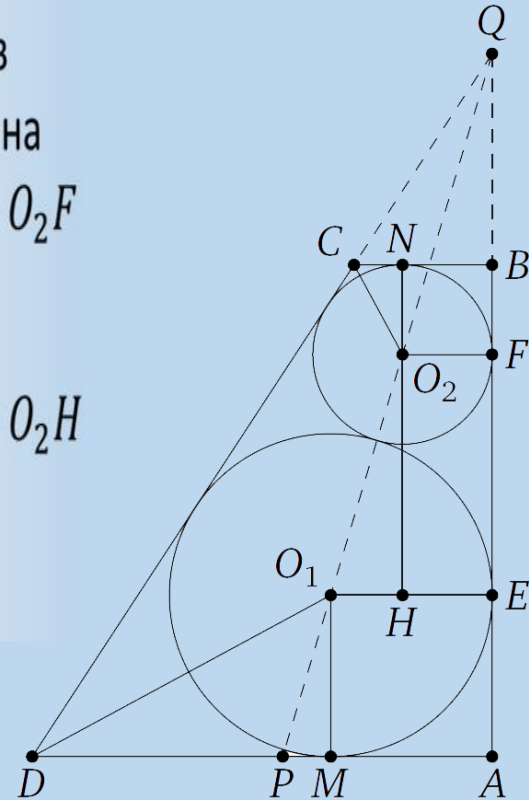
б) Пусть окружность с центром O_1 радиуса $R = \frac{4}{3}$ касается боковой стороны

AB в точке E , а основания AD — в точке M ; окружность радиуса $r = \frac{1}{3}$ с

центром O_2 касается боковой стороны AB в точке F , а основания BC — в точке N . Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на радиус большей, проведённый в точку E . Тогда $O_2H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$, а так как линия центров касающихся окружностей

проходит через их точку касания, O_1O_2 то $= R + r = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. Значит, $EF = O_2H$

$$= \sqrt{O_1O_2^2 + O_1H^2} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}. \text{ Обозначим } \angle AQP = \angle HO_1O_2 = \alpha.$$



Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1 H}{O_2 H} = \frac{3}{4}$, $\angle BQC = 2\alpha$, $\angle BCD = 90^\circ + 2\alpha$, $\angle O_2 CN = \frac{1}{2} \angle BCD = 45^\circ + \alpha$.

Из прямоугольного треугольника $O_2 CN$ находим, что $NC = O_2 N \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)$

$$= O_2 N \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{3} * \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3} * \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{21}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC =$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21}.$$

Аналогично $\angle O_1 DM = 45^\circ - \alpha$, $MD = O_1 M \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = O_1 M$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{4}{3} * \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3} * \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{28}{3},$$
$$AD = AM + MD = \frac{4}{3} + \frac{28}{3} = \frac{32}{3},$$

а так как

$$AB = AE + EF + FB = R + O_2 H + r = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3,$$
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) * AB = \frac{1}{2} \left(\frac{32}{3} + \frac{8}{21} \right) * 3 = \frac{116}{7}.$$

Ответ: $\frac{116}{7}$.

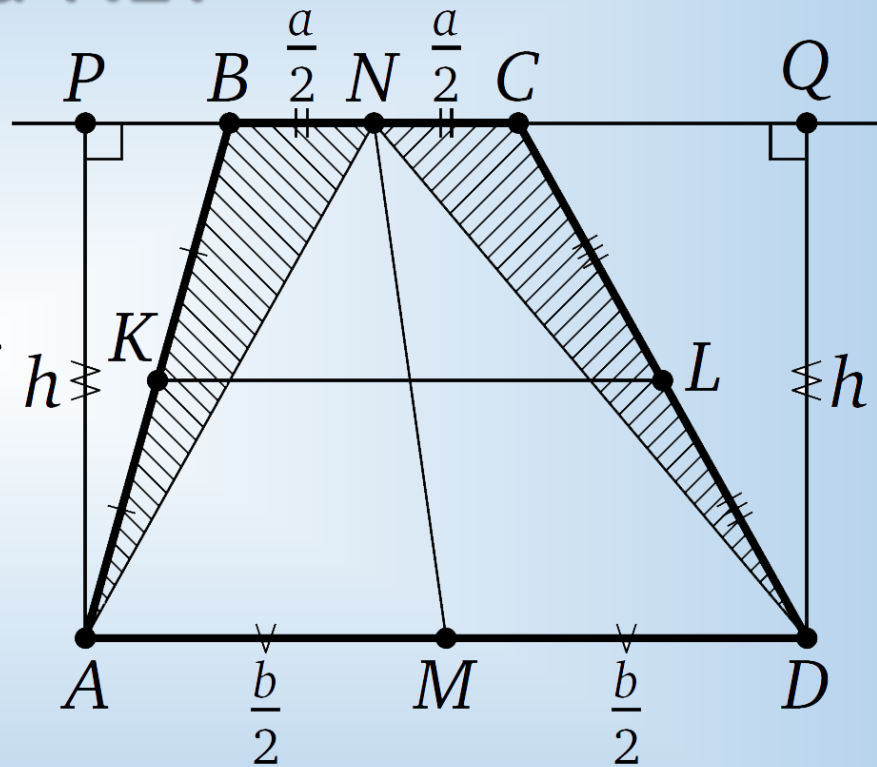
Задача для самостоятельного решения

- В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.
- а) Докажите, что точка касания окружностей равноудалена от прямых AB и CD .
- б) Найдите меньшее основание трапеции, если $AD = 28$, а радиус большей окружности равен $\frac{7}{2}$.

Ответ: 1.

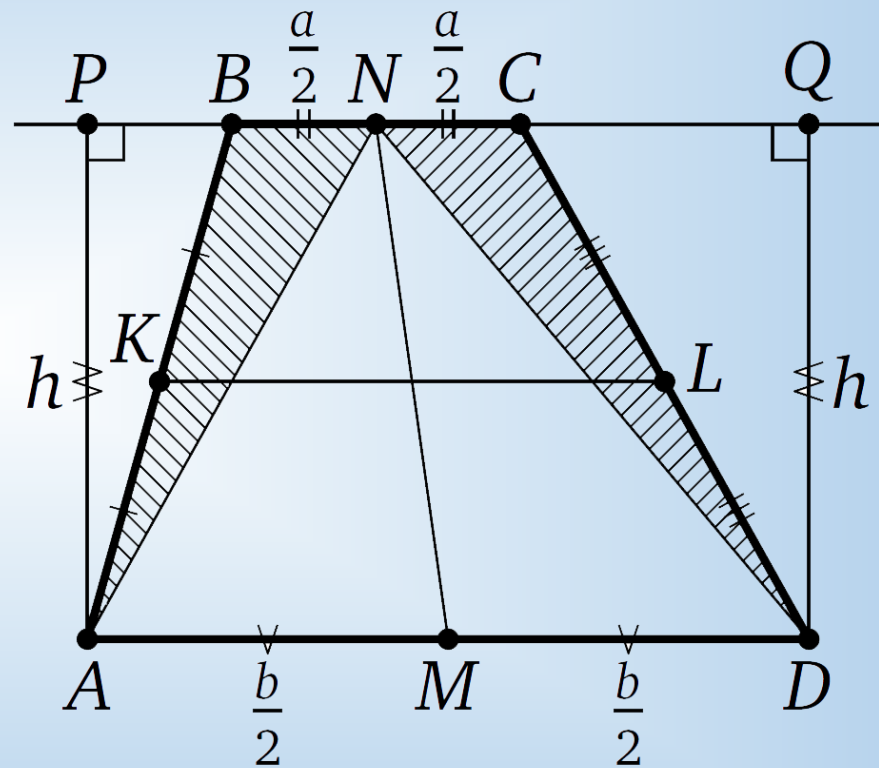
Задача №7

- Один из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника, делит его площадь пополам, а другой — в отношении 11:17.
- а) Докажите, что данный четырёхугольник — трапеция.
- б) Найдите отношение оснований этой трапеции.



Решение

- а) Пусть M и N — середины сторон соответственно AD и BC четырёхугольника $ABCD$, причём отрезок MN делит площадь четырёхугольника пополам. Отрезок NM — медиана треугольника AND , поэтому $S_{\triangle ANM} = S_{\triangle DNM}$. Тогда $S_{\triangle ABN} = S_{ABNM} - S_{\triangle ANM} = S_{CDMN} - S_{\triangle DNM} = S_{\triangle DCN}$.
- Треугольники ABN и DCN с равными сторонами BN и CN равновелики, значит, их высоты AP и DQ , опущенные на эти стороны, равны. Следовательно, $BC \parallel AD$, т.е. четырёхугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм. Пусть K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Предположим, что $AB \parallel CD$. Тогда отрезок KL разбивает параллелограмм на две равновеликие части, что противоречит условию задачи. Таким образом, четырёхугольник $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC .



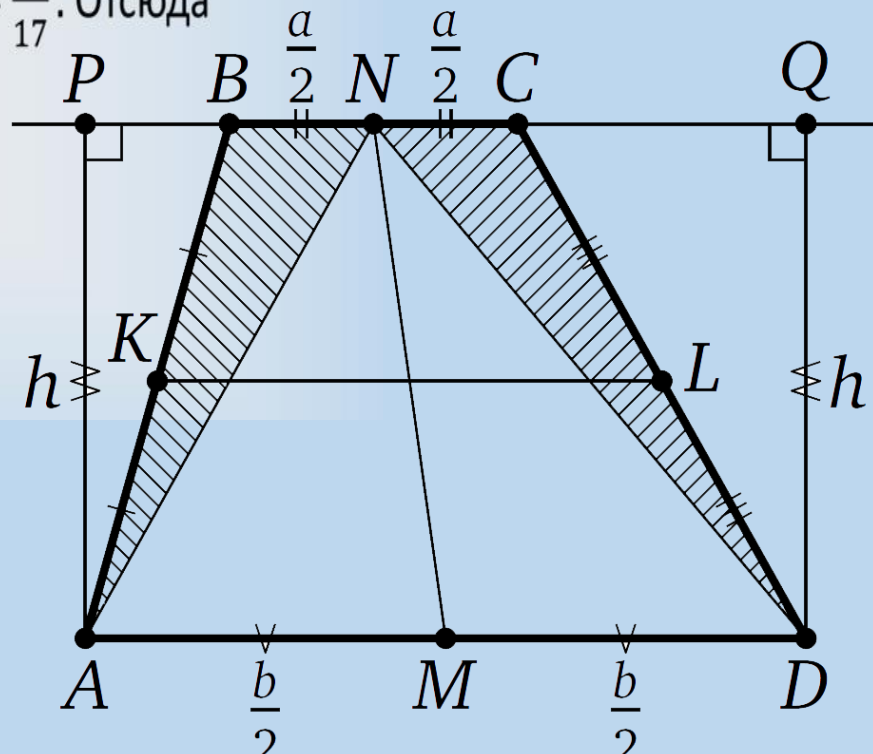
б) Пусть высота трапеции равна h , $BC = a$, $AD = b$, $a < b$. Тогда $KL = \frac{a+b}{2}$, т.к.

KL — средняя линия трапеции. Поэтому $S_{BCLK} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} * \frac{h}{2} = \frac{(3a+b)h}{8}$,

$S_{AKLD} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} * \frac{h}{2} = \frac{(a+3b)h}{8}$, а т.к. $\frac{S_{BCLK}}{S_{AKLD}} = \frac{11}{17}$, то $\frac{3a+b}{a+3b} = \frac{11}{17}$. Отсюда

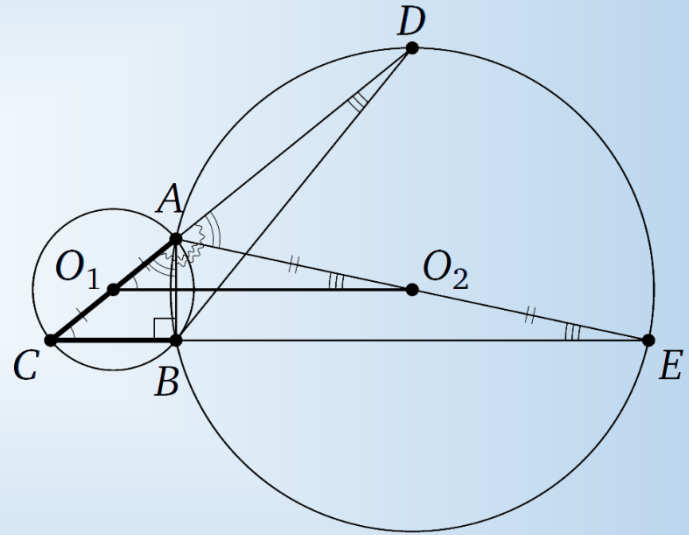
находим, что $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$.

Ответ: 2:5.



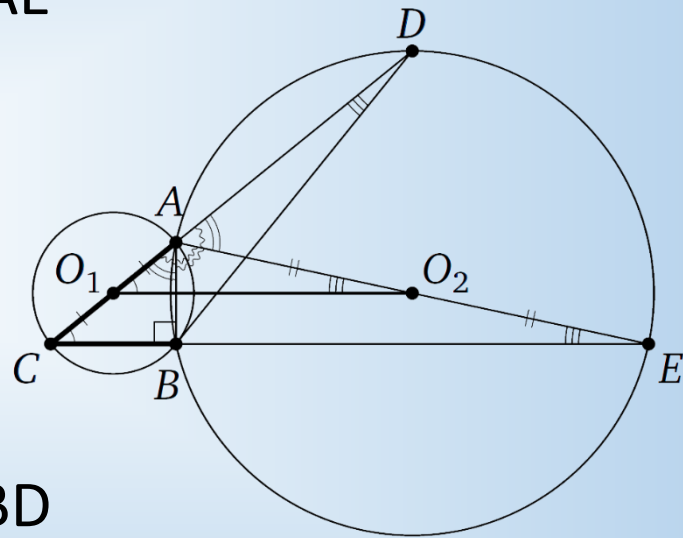
Задача №8

- Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.
- а) Докажите, что треугольник CBD подобен треугольнику, вершины которого — центры окружностей и точка A .
- б) Найдите AD , если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB=3$.

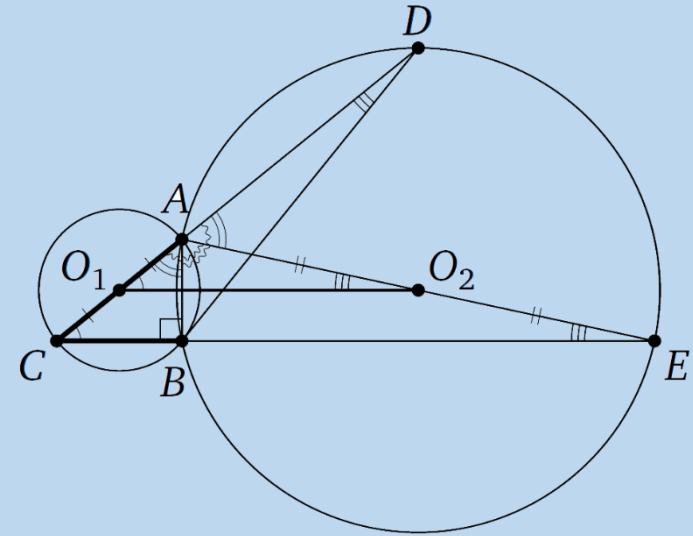


Решение

- а) Поскольку $\angle ABE = 90^\circ$, отрезок AE — диаметр окружности с центром O_2 .
Значит, точка O_2 — середина стороны AE треугольника CAE , а отрезок O_1O_2 — средняя линия этого треугольника, поэтому $\angle AO_2O_1 = \angle AEC$, $\angle AO_1O_2 = \angle ACE = \angle DCB$, а т.к. вписанные во вторую окружность углы ADB и AEB опираются на одну и ту же дугу, то $\angle AO_2O_1 = \angle AEC = \angle AEB = \angle ADB = \angle CDB$. Следовательно, треугольники CBD и O_1AO_2 подобны по двум углам.



Ответ: 9.



Спасибо за внимание.

Контактные данные:

irina-bogom@mail.ru