

# Анализ ошибок ЕГЭ по математике на профильном уровне при выполнении заданий с развернутым ответом в 2024 году в Мурманской области

*Заместитель председателя ПК ЕГЭ  
по математике  
(профильный уровень)  
в Мурманской области  
Реймхен Л.Л., учитель математики  
МБОУ г. Мурманска СОШ №36*

13. а) Решите уравнение  $\cos 2x - \sqrt{3} \cos(x - \pi) + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

## ОШИБКИ

а)

- При применении формулы приведения
- При записи ответов простейших тригонометрических уравнений

б) При отборе корней

- На числовой окружности (должны быть: выделенная дуга, подписаны точки, записан ответ)
- Двойным неравенством (вычислительные ошибки)
- Методом перебора (должны быть отражены те значения  $n$ , при которых корень не попадает в промежуток)

№13

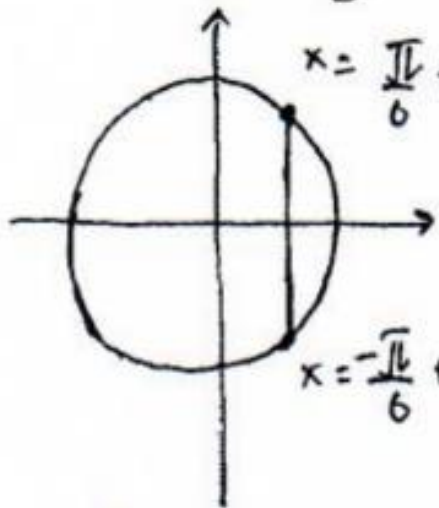
$$a) \cos 2x - \sqrt{3} \cos(x - \pi) + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 1 = 0$$

$$(2 \cos x - \sqrt{3}) \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \pi t, t \in \mathbb{Z}$$

Ошибка в формуле  
приведения

Ошибка в ответе  
простейшего  
тригонометрического  
уравнения

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

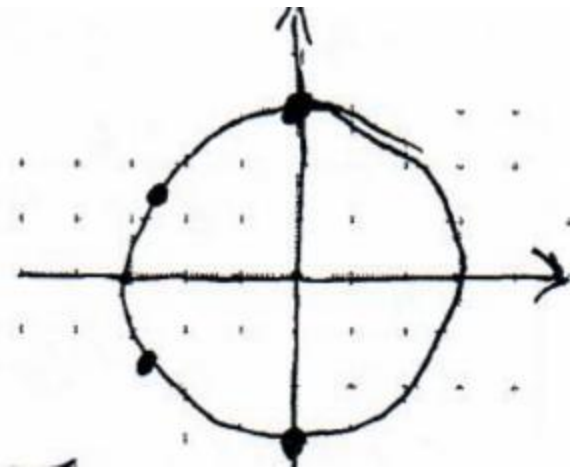
Ошибки при записи  
ответов

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\begin{cases} z = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ z = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



8)  $\left[ \frac{3\pi}{2}, 3\pi \right]$   $\frac{2\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$   
 Ответ:  $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

Ошибка при отборе корней.  
 Не выполнен формат отбора  
 корней на окружности.

**14.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точки  $M$  и  $K$  — середины ребер  $AB$  и  $SC$  соответственно, а точки  $N$  и  $L$  отмечены на ребрах  $SA$  и  $BC$  соответственно так, что отрезки  $MK$  и  $NL$  пересекаются, а  $2AN = 3NS$ .

а) Докажите, что прямые  $MN$ ,  $KL$  и  $SB$  пересекаются в одной точке.

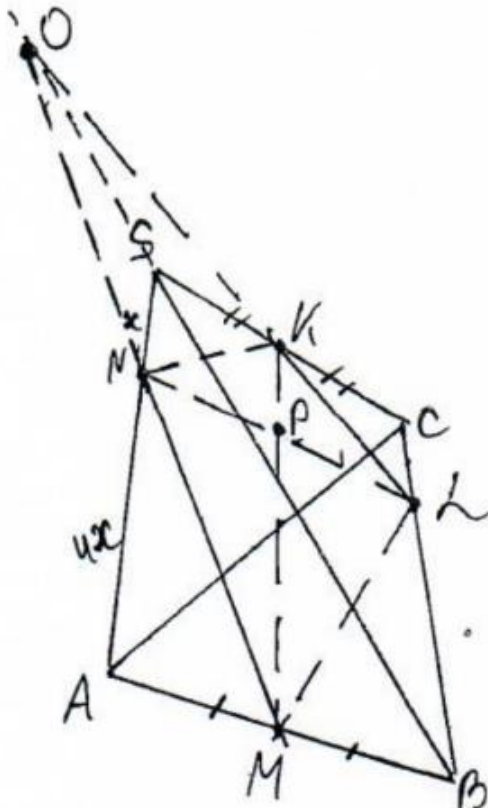
б) Найдите отношение  $BL:LC$ .

## ОШИБКИ

а) Необоснованное доказательство

б) Смысловые ошибки

14



Дано;  $SABC$  - прав-ая треуг. пирамида;  
 $AM=MB$ ;  $SK=KC$ ;  $NS=x$ ;  $AN=4x$ ;  $MK \cap NL = P$

Дока-ти:  $MN \cap KL \cap SB = O$

Док-во: Докажем, что прямые лежат в одной пл-ти. По условию  $MK \cap NL = P \Rightarrow$  через 2 пересека-ся прямые проведет плоскость и при этом только 1.

$\Rightarrow \Delta ASB$ .  $SB \in (ASB)$  и  $NM \in (ASB)$

$NM \nparallel SB$  (т.к.  $M$  - середина; а  $AN:NS=4$ )

$\Rightarrow$  Прямые лежат в одной пл-ти, непараллельны, следовательно они пересекаются.

Проведем сечение с прямой  $KL$

- 1)  $KL \in (SBC)$  и  $SB \in (SBC) \Rightarrow KL \cap SB$
- 2)  $KL$  не явл-ся ср. линией  $\Delta SBC$

$\Rightarrow KL \cap SB \cap MN$  в одн-ой точке  $O$  и т.д.

Необоснованное  
утверждение



Смысловая  
ошибка  
(по условию  
 $AN=4NS$ )

(14)

$$NK \cap AC = E$$

$$EM \cap BC = O$$

$$AN = 2x, \text{ тогда } NS = 8x$$

$$AS = SC = 10x \text{ (мб. условия)}$$

$$SK = KC = \frac{SC}{2} = 5x$$

теорема Менелая в  $\triangle ASC$  и сеч  $EK$

$$\frac{CK}{SK} \cdot \frac{SN}{AN} \cdot \frac{EA}{EC} = 1; \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{8x}{2x} \cdot \frac{EA}{EC} = 1$$

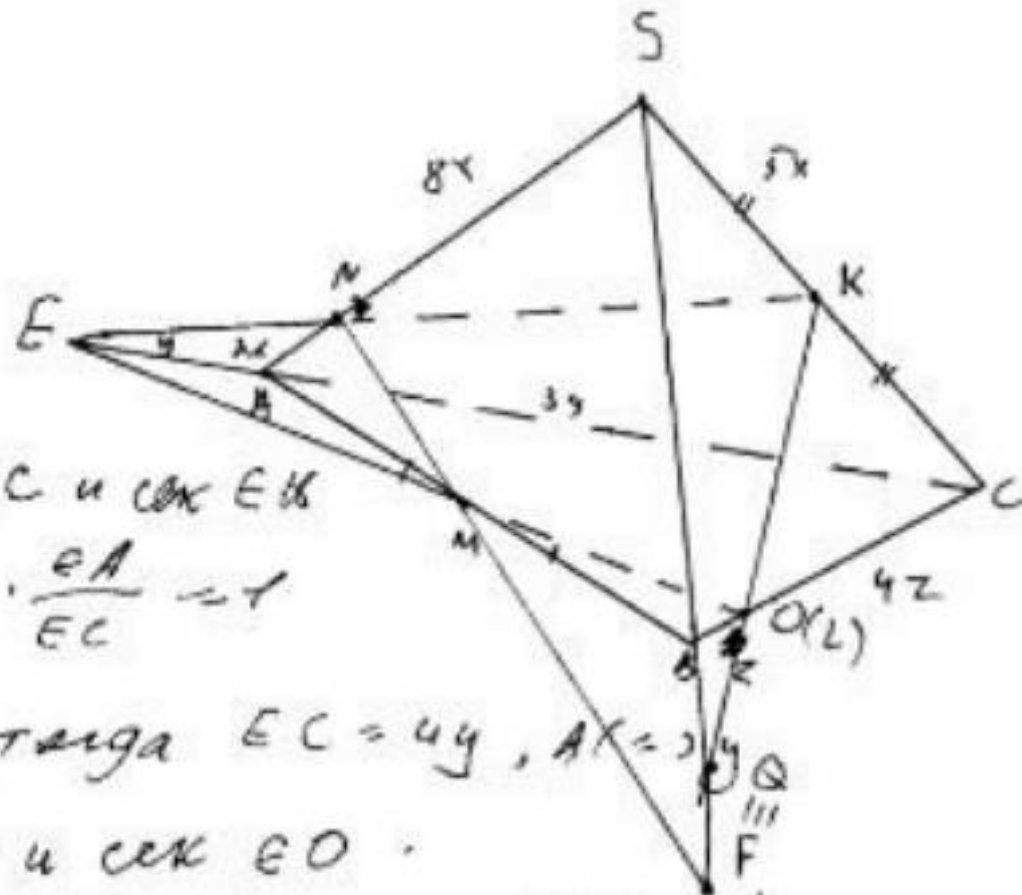
$$\frac{EA}{EC} = \frac{1}{4} \quad \text{пусть } EA = y, \text{ тогда } EC = 4y, \text{ тогда } AC = 5y$$

теорема Менелая в  $\triangle ABC$  и сеч  $EO$

$$\frac{CO}{BO} \cdot \frac{MB}{AM} \cdot \frac{AE}{EC} = 1; \quad \frac{CO}{BO} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{y}{4y} = 1 \Rightarrow \frac{CO}{BO} = \frac{4}{1}$$

$$\text{пусть } BO = z, \text{ тогда } OC = 4z$$

$$EK \cap EO = E, \quad NK \cap EK = K, \quad EM \cap EO = O$$





15. Решите неравенство  $\frac{9^{x-1}}{9^{x-1} - 1} - \frac{5}{9^x - 1} \geq \frac{36}{81^x - 10 \cdot 9^x + 9}$ .

## ОШИБКИ

- Ошибки в преобразовании дробно-рационального выражения
- Потеря изолированной точки в ответе
- Неверное определение промежутков знакопостоянства

$$\frac{2 \cdot 4^{x-2}}{2 \cdot 4^{x-2} - 1} \geq \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8}$$

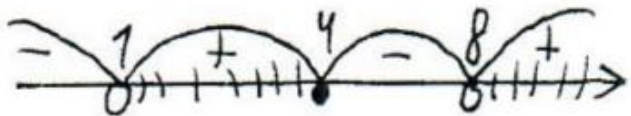
$$\frac{0,125 \cdot 4^x}{0,125 \cdot 4^x - 1} \geq \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{(4^x - 8)(4^x - 1)}$$

$$\frac{4^x}{(4^x - 8)} \geq \frac{7(4^x - 8)(4^x - 1) + 40(4^x - 1)}{(4^x - 8)(4^x - 1)^2}$$

$$\frac{4^x}{4^x - 8} - \frac{7(4^x - 8)(4^x - 1) + 40(4^x - 1)}{(4^x - 8)(4^x - 1)^2} \geq 0$$

$$\frac{(4^x - 8)(4^x - 1)(4^x(4^x - 1) - 7(4^x - 8) - 40)}{(4^x - 8)^2(4^x - 1)^2} \geq 0$$

$$\frac{(4^x - 8)(4^x - 1)(4^x - 4)}{(4^x - 8)^2(4^x - 1)^2} \geq 0 \quad \begin{matrix} 4^x \neq 8 \\ 4^x \neq 1 \end{matrix}$$



$$\cancel{4^x - 2} \quad 4^x(4^x - 1) - 7(4^x - 8) - 40 = \\ = 4^{2x} - 8 \cdot 4^x + 16 = (4^x - 4)^2$$

Ошибка в  
преобразовании  
выражения

№ 15

$$\frac{9^{x-1}}{9^{x-1}-1} \geq \frac{5}{9^x-1} + \frac{36}{81^x-10 \cdot 9^x+9}$$

$$\frac{\frac{9^x}{9}}{\frac{9^x}{9}-1} \geq \frac{5}{9^x-1} + \frac{36}{9^{2x}-10 \cdot 9^x+9}$$

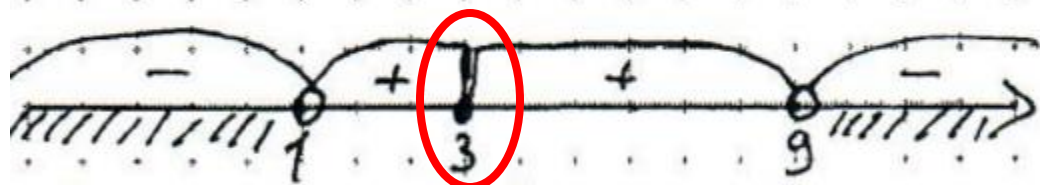
пусть  $9^x = t$ , тогда

$$\frac{t}{t-1} - \frac{5}{t-1} - \frac{36}{t^2-10t+9} \geq 0$$

Ошибка в  
преобразовании  
выражения

$$\frac{5t - 45 + 36 - t^2 + t}{(t-1)(t-9)} \leq 0$$

$$\frac{-t^2 + 6t - 9}{(t-1)(t-9)} \leq 0$$



$$\begin{array}{l} [t < 1 \\ [t > 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} [g^a < 1 \\ [g^a > 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} [a < 0 \\ [a > 1 \end{array}$$

$$-t^2 + 6t - 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$t = \frac{-6}{-2} = 3$$

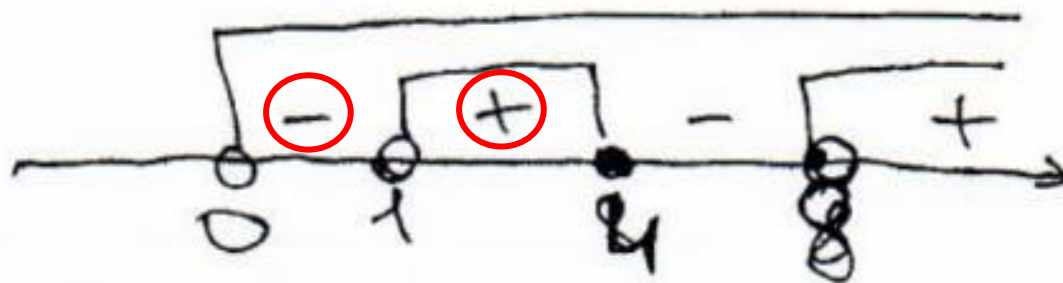
$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$$

Потеря  
изолированной  
точки в ответе

$$\frac{t^2 - 8t + 16}{(t-8)(t-1)} \geq 0$$

$$\frac{(t-4)^2}{(t-8)(t-1)} \geq 0$$

Ключи: 4; 8; 1



Неверное определение  
промежутков  
знакопостоянства

- 16.** В июле 2026 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 34 150 рублей больше суммы, взятой в кредит?

## **ОШИБКИ**

- Неверно построена математическая модель
- Вычислительные ошибки



~ 16

Пусть  $S$  - кредит взятый в банке,  $x$  - ~~коэффициент~~ темп роста долга выплачиваемая ежегодно; долг будет увеличиваться на  $(1 + \frac{20}{100}) = 1,2$  по сравнению с концом предыдущего года

июнь 2026 года	$S$
январь 2027 года	$S + 1,2$
с февр. по июнь 2027 года	$x(S + 1,2)$
январь 2028 года	$Sx + 1,2x + 1,2$
с февр. по июнь 2028 года	$x(Sx + 1,2x + 1,2)$
январь 2029 года	$Sx^2 + 1,2x^2 + 1,2x + 1,2$
<del>февр.</del> с <del>февр.</del> по июнь 2029 года	$x(Sx^2 + 1,2x^2 + 1,2x + 1,2)$

$$x(Sx^2 + 1,2x^2 + 1,2x + 1,2) = S + 48250$$

$$Sx^3 + 1,2x^3 + 1,2x^2 + 1,2x = S + 48250$$

Неверная модель

№16

$S$  - сумма, взятая в кредит (в рублях)

$x$  - выплаты (в рублях)

## Вычислительные ошибки

составим математическую модель.

$$\begin{cases} ((S \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0 \\ 3x = S + 34150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 \\ S = 3x - 34150 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \left( 3 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 - \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{11}{10} - 1 \right) = 34150 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 \\ S = 3x - 34150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{34150 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3}{3 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 - \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{11}{10} - 1} \\ S = 3x - 34150 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{45453650}{1000} \cdot \frac{1000}{1210} \\ S = 3x - 34150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 37565 \\ S = 3x - 34150 \end{cases}$$

$$3x = 3 \cdot 37565 = 112695 \text{ (рублей)}$$

Ответ: 112695

$$x = 66550.$$

$$3x = \underline{133650}$$

Ответ: 133650 руб.

17. Окружность с центром в точке  $O$  касается сторон угла с вершиной  $N$  в точках  $A$  и  $B$ . Отрезок  $BC$  — диаметр этой окружности.
- а) Докажите, что прямая  $AC$  параллельна биссектрисе угла  $ANB$ .
- б) Найдите  $NO$ , если  $AB = 24$  и  $AC = 10$ .

## ОШИБКИ

а) Необоснованное доказательство

б)

- Вычислительные
- Смысловые

задание 17

Дано окр.  $(O; R)$  и  $\angle ANB$

$\angle ANB$

BC - диаметр

Д.т.  $AC \parallel NE$

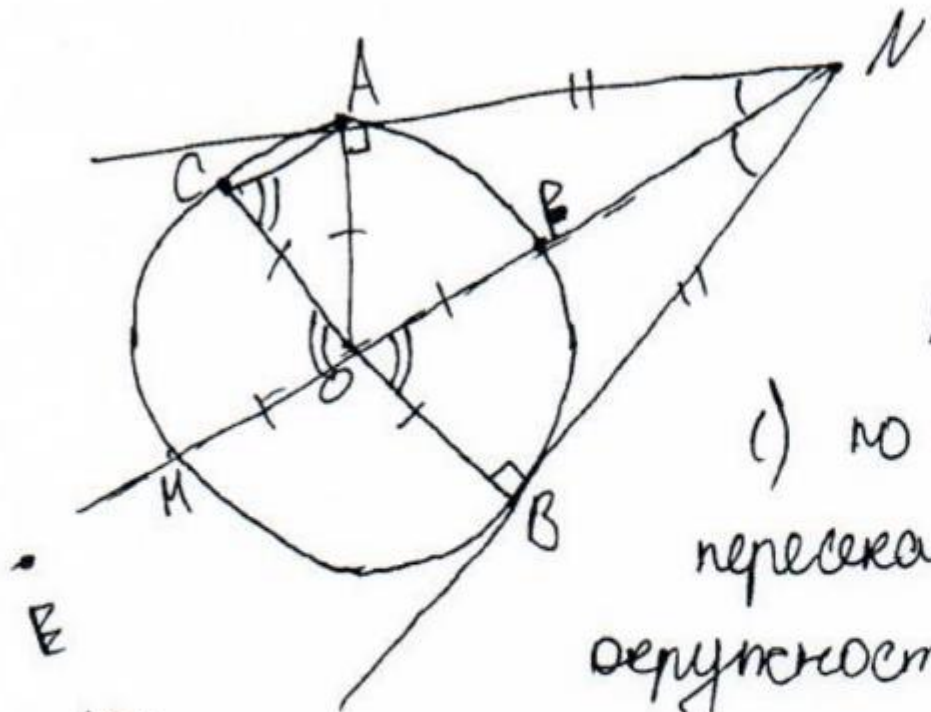
Доказательство:

1) по свойству касательных  
пересекающихся в одной точке вне  
окружности имеем:  $AN = NB$  - поэтому

$O \in NE$ .

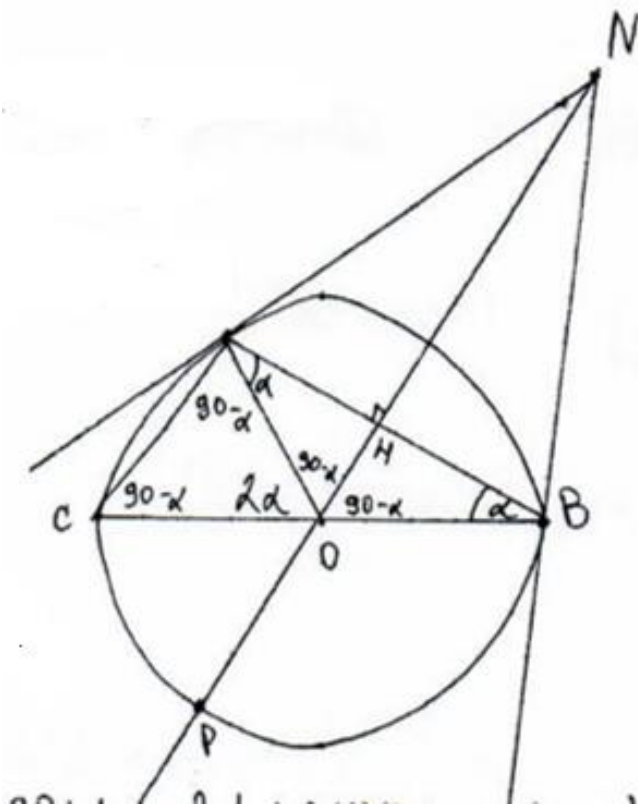
$\angle FOB = \angle COM$  т.к.  $\angle ACO = \angle FOB$  - по свойству парал-  
лельных прямых, значит  $CA \parallel NE$   $\blacktriangle$

Необоснованное  
утверждение





N 17



5)  $AC=14; AB=48 \quad NO=?$

$\Delta ACB$  - пуг:

по т. Пифагора  $CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{196 + 2304} = \sqrt{2500} = 2\sqrt{625} = 2 \cdot 25 = 50$   
 $= 8\sqrt{40} = 16\sqrt{10}$

$CO = OB = \frac{1}{2} CB = 8\sqrt{10} = \sqrt{640}$

$HB = \frac{1}{2} AB = 24$

$\Delta OHB$  - пуг:

по т. Пифагора  $OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{640 - 576} = \sqrt{64} = 8$

$NO = NH + OH = NH + 8$

$\Delta ONB$  - пуг ( $OB \perp BN$ ,  $\angle OBN = 90^\circ$ )  
 $ON^2 = OB^2 + BN^2$   $\angle$  кас.

$\Delta HBN$  - пуг ( $NH$  - бис, мед., высота в пуг.  $\Delta$ )

$NH^2 + BH^2 = BN^2$

Пусть  $NH = x$

$(x+8)^2 = 640 + BN^2 \quad BN^2 = x^2 + 16x + 64 - 640 = x^2 + 16x - 576$

$x^2 + 576 = BN^2$

$x^2 + 576 = x^2 + 16x - 576$

$16x = 2 \cdot 576 \quad 8x = 576 \quad x = \frac{576}{8} = 72$

$NO = NH + OH = 8 + 72 = 80$

Ответ: 80

Вычислительная  
ошибка

**18.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + a = 0, \\ 2|y| - x^2 + 4x = 0. \end{cases}$$

имеет два решения.

## ОШИБКИ

### Графический способ решения

- Неверное построение графика уравнения с модулем
- Неверная трактовка построенной модели

### Аналитический способ решения

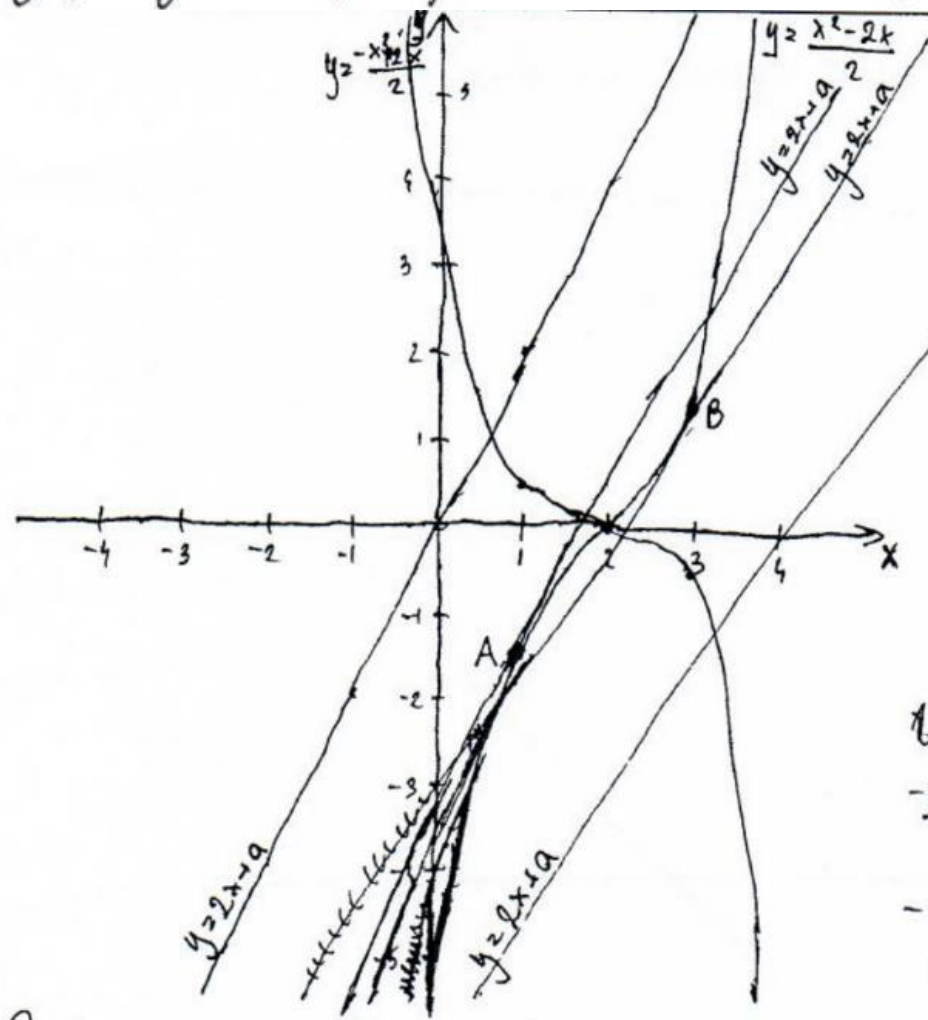
- Отсутствие логики решения



$$18) \begin{cases} 2x - y + a = 0 & (1) \\ 2|y| - x^2 + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Из (1) получаем  $y = 2x + a$   
 Из (2) получаем  $y = \frac{x^2 - 2x}{2}$ ;  $y = \frac{-x^2 + 2x}{2}$

Изобразим графики на  $xOy$ :



решения удовлетворяют  
 $x \in (-\infty; B)$  и  $(A; +\infty)$

т. B:

$$\frac{x^2 - 2x}{2} = 2x + a$$

$$x^2 - 2x = 4x + 2a$$

$$x^2 - 6x - 2a = 0$$

$$D = 36 + 8a = 0$$

$$8a = -36$$

$$a = -\frac{36}{8}$$

т. A:

$$\frac{-x^2 + 2x}{2} = 2x + a; -x^2 + 2x - 4x - 2a = 0;$$

$$-x^2 - 2x - 2a = 0; x^2 + 2x + 2a = 0$$

$$D = 4 - 8a = 0$$

$$-8a = -4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Отв:  $(-\infty; -\frac{36}{8}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

Неверное  
 построение  
 графика

$$18. \begin{cases} 2x - y + a = 0 \\ 2|y| - x^2 + 2x = 0 \end{cases} \quad / 2 \text{ решения} /$$

$$\begin{cases} y = 2x + a \\ \begin{cases} 2y = x^2 - 2x \\ 2y = 2x - x^2 \end{cases} \end{cases}$$

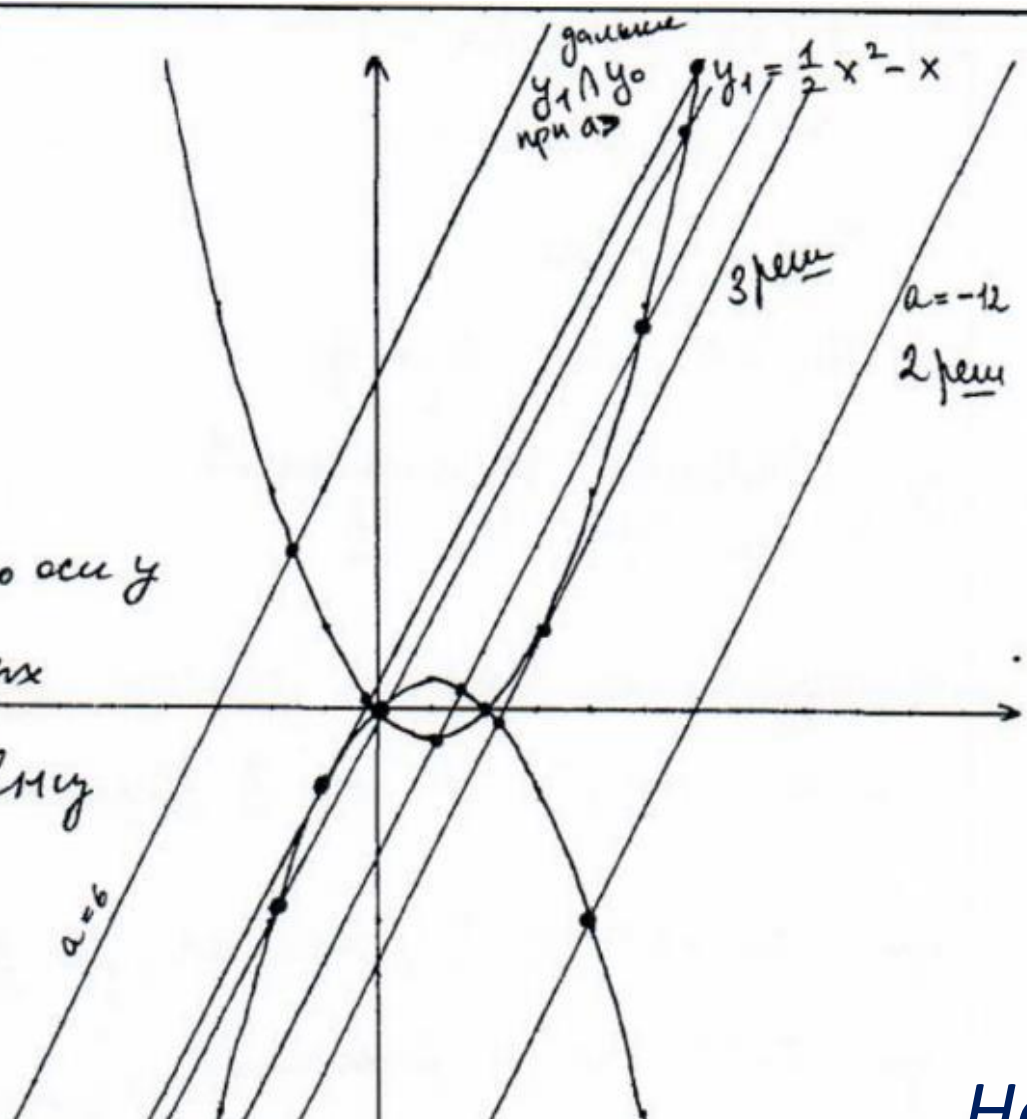
$y_0 = 2x + a$  — прямая, движется по оси  $y$

$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x$  — парабола, ветви вверх

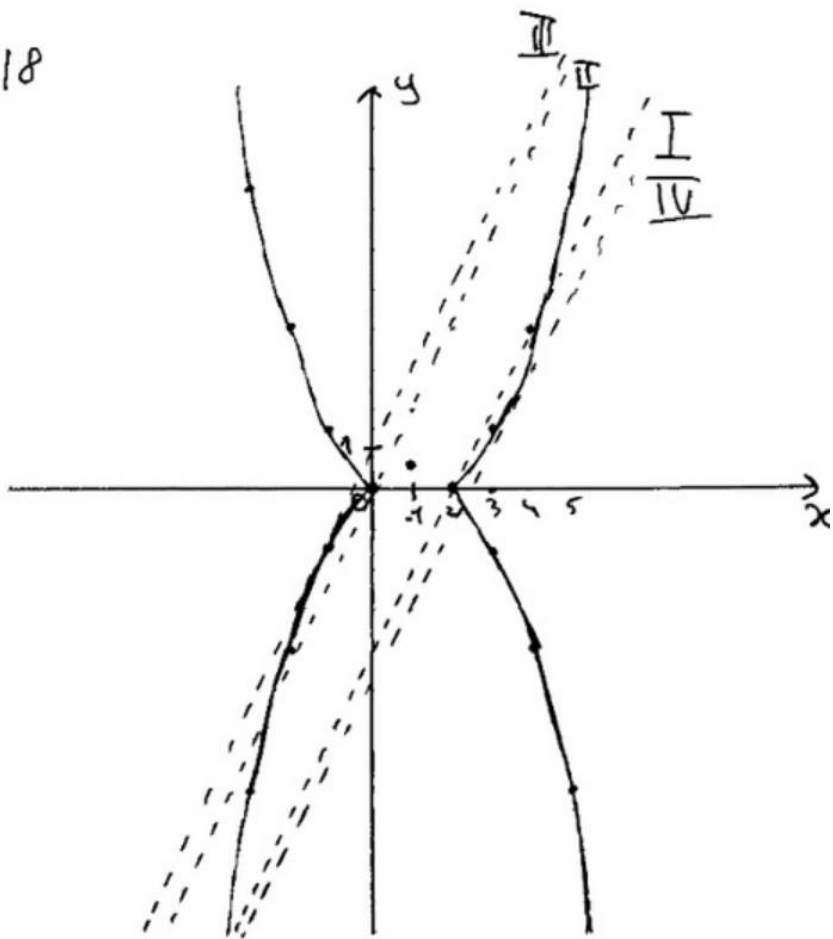
$y_2 = x - \frac{1}{2}x^2$  — парабола, ветви вниз

Найдем точки касания:

$(y_0^{(1)} \cap y_1)$  и  $(y_0^{(2)} \cap y_2)$



Неверное  
построение  
графика



Рассмотрим ситуации:

- 1) при прохождении прямой через точку касания с верхней функцией (где  $y > 0$ ) будет 3 различных решения, но от  $-\infty$  до этой точки - 2
- 2) от прямой I до прямой II - будет 2 решения  
 I - прямая проходит через точку  $(2; 0) \Rightarrow 0 = 4 + a \Rightarrow a = -4$   
 II - прямая проходит через точку  $(0; 0) \Rightarrow 0 = 0 + a \Rightarrow a = 0$   
 ∴  
 $a \in (-4; 0)$  - два решения
- 3) при прохождении прямой через точку касания нижнего графика и выше графика уравнений будет иметь 2 решения

Ответ:  $a \in (-4; 0)$

*Неверная трактовка  
построенной модели*

**19.** Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.

а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 175?

б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 176?

в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 180 включительно.

## **ОШИБКИ**

- Неаргументированное обоснование пункта б)
- Вычислительные
- Неаргументированное обоснование пункта в)

№19 а) Да, можно: всего 45 монет  $\Rightarrow 29 \cdot 5 + 15 \cdot 2 = \underline{145 + 30 = 175}$

Затратили 44  
монеты.

б) Нет, потому что  $29 \cdot 5 + 15 \cdot 2 = 175 \Rightarrow 44$  монеты

45 монета = 2  $\Rightarrow 175 + 2 = 177$  (что не соответствует условию задачи)

Неаргументированное  
обоснование пункта б)



в) Максимальная сумма ~~монет~~ равна 156 руб., значит минимуму нужно добавить:  $160 - 156 = 4$  рубля =  $\underbrace{1+1+1+1}_{4 \text{ монеты}} \rightarrow 4$  монеты по 1 рублю.

С этими количеством монет по 1 рублю и с монетами из условия можно составить любую целую сумму от 1 до 160 рублей:

1 рубль	2 руб.	3 руб.	4 руб.	5 руб.	6 руб.	...
1	1+1	1+1+1	1+1+1+1	5	5+1	

160 рублей
$\underbrace{5+5+...+5}_{20 \text{ монет}} + \underbrace{2+2+...+2}_{28 \text{ монет}} + 1+1+1+1$

Ответ а) можно, б) нельзя, в) 4 монеты

Неаргументированное  
обоснование пункта в)