

Анализ выполнения заданий с развернутым ответом КИМ ОГЭ-2024



2) докажи
 $\angle KBN = \angle NDK$

$\triangle BKC$ и $\triangle APD$ –
равносторонние
Докажи
1) $\square BKDP$ – параллелограмм
2) $\angle PBK = \angle KDP$
3) $\triangle PBK = \triangle KDP$

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; из него должен быть понятен ход рассуждений экзаменуемого. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.** Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение участника экзамена в решении задачи, а не недочеты по сравнению с «эталонным» решением.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего образования.

Задание 20

Номер задания	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания
20	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы	П

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Арифметическая ошибка – это ошибка, допущенная при сложении, вычитании, умножении и делении.



Задание 20

Решить неравенство:

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

Решить уравнение:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$$

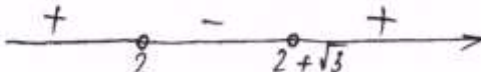
Задание 20

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

№20)

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$
$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$
$$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) < 0$$
$$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) = 0$$
$$\begin{matrix} x-2=0 & x-2-\sqrt{3}=0 \\ x=2 & \text{или} & x=2+\sqrt{3} \end{matrix}$$

по методу интервалов:


$$x \in (2; 2+\sqrt{3})$$

Ответ: $x \in (2; 2+\sqrt{3})$

№20

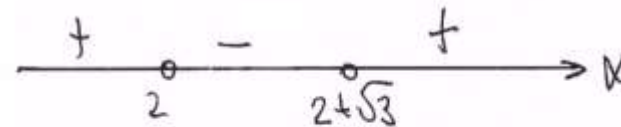
$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$
$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$
$$(x-2)((x-2) - \sqrt{3}) < 0$$

Метод интервалов;

$$f(x) = (x-2)(x-2-\sqrt{3})$$

Нули функции:

$$x=2 \quad ; \quad x=2+\sqrt{3}$$



$$x \in (2; 2+\sqrt{3})$$

Ответ: $x \in (2; 2+\sqrt{3})$

Задание 20

$$x^2 (x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)(x-2) < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)(x-2) - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$((x-2) - \sqrt{3})(x-2) < 0$$

Введём функцию $f(x) = ((x-2) - \sqrt{3})(x-2)$

$$f(x) = 0$$

, тогда:

$$((x-2) - \sqrt{3}) \cdot (x-2) = 0$$

Произведение равно нулю, если один из его множителей равен нулю, а другой при этом не равен нулю.

$$(x-2) - \sqrt{3} = 0$$

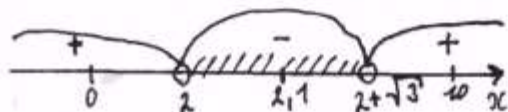
$$x-2=0$$

$$x-2-\sqrt{3}=0$$

$$x=2$$

$$x = 2 + \sqrt{3}$$

Решим методом интервалов



Ответ: $(2; 2+\sqrt{3})$

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$f(0) = (0-2-\sqrt{3})(0-2) = -2(-2-\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3} > 0$$

$$f(2,1) = (2,1-2-\sqrt{3})(2,1-2) = 0,1(0,1-\sqrt{3}) = 0,01-0,1\sqrt{3} < 0$$

$$f(10) = (10-2-\sqrt{3})(10-2) = 8(8-\sqrt{3}) = 64-8\sqrt{3} > 0$$

Задание 20

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

№ 20

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$(x-2)((x-2) - \sqrt{3}) < 0$$

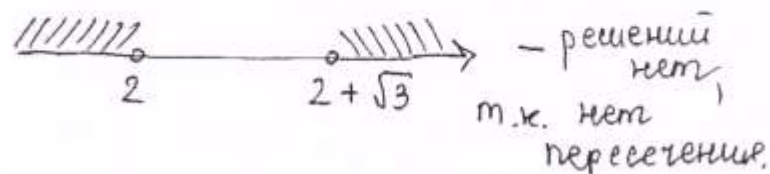
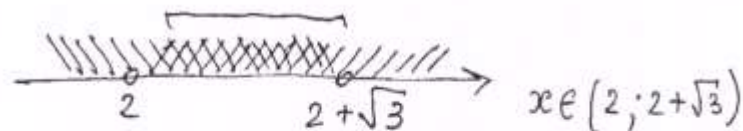
$$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) < 0$$

Произведение двух множителей меньше 0, когда перед ними стоят противоположные знаки

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2-\sqrt{3} < 0 \end{cases} ; \begin{cases} x > 2 \\ x < 2+\sqrt{3} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x-2-\sqrt{3} > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x < 2 \\ x > 2+\sqrt{3} \end{cases} ;$$

$$\text{Ответ: } x \in (2; 2+\sqrt{3})$$



Задание 20

N 20

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$(x-2)((x-2)-\sqrt{3}) < 0$$

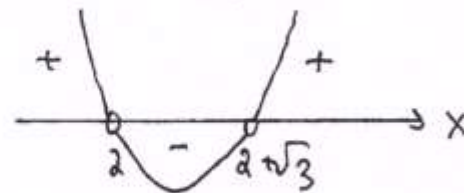
Введем функцию $f(x) = (x-2)((x-2)-\sqrt{3})$

или функцию: $(x-2)((x-2)-\sqrt{3}) = 0$

$$x-2=0 \quad x-2-\sqrt{3}=0$$

$$x=2 \quad x=2+\sqrt{3}$$

график функции - парабола. Построим схематический график функции



$$(x-2)((x-2)-\sqrt{3}) < 0 \quad \text{при } x \in (2; 2+\sqrt{3})$$

$$\text{Отв.: } (2; 2+\sqrt{3})$$

Задание 20

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

~20

20.

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2(x+2) - (x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2-1) = 0$$

$$(x+2)(x+1)(x-1) = 0$$

$$x+2=0 \text{ или } x+1=0 \text{ или } x-1=0$$

$$x=-2 \quad x=-1 \quad x=1.$$

$$\text{Ответ: } -2; -1; 1.$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x^3 - x) + (2x^2 - 2) = 0$$

$$x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x + 2) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ или } x + 2 = 0$$

$$x^2 = 1 \quad x = -2$$

$$x = \pm \sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

$$\text{Ответ: } 1; -1; -2$$

Задание 20

$$(x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0$$

$$(x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0$$

пусть $(x-4)^2 = t$, тогда

$$t^2 - 4t - 21 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 16 + 84 = 100$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$$

$$t_2 = \frac{4 - 10}{2} = -3$$

$$(x-4)^2 = t_1$$

$$(x-4)^2 = t_2$$

$$(x-4)^2 = 7$$

$$(x-4)^2 = -3$$

$$x-4 = \sqrt{7} \text{ или } x-4 = -\sqrt{7} \left| \begin{array}{l} \text{нет решений} \\ x_2 = -\sqrt{7} + 4 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \sqrt{7} + 4$$

Ответ: $\sqrt{7} + 4$; $-\sqrt{7} + 4$

20 задание

$$(x-4)^4 - 4(x-4) - 21 = 0$$

метод замены:

пусть $(x-4)^2 = t$, тогда

$$t^2 - 4t - 21 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = -21$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 100 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad t_1 = \frac{4+10}{2} = 7$$

$$t_2 = \frac{4-10}{2} = -3$$

$$\textcircled{1} (x-4)^2 = t_1$$

$$(x-4)^2 = 7$$

$$x^2 - 8x + 16 = 7$$

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

$$a = 1, b = -8, c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 28 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad x_1 = \frac{8 + \sqrt{28}}{2} = 4 + \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{28}}{2} = 4 - \sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 4 + \sqrt{7} \\ x_2 = 4 - \sqrt{7}$$

$$(x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0$$

$$\textcircled{2} (x-4)^2 = t_2$$

$$(x-4)^2 = -3$$

$$x^2 - 8x + 16 + 3 = 0$$

$$x^2 - 8x + 19 = 0$$

$$a = 1, b = -8, c = 19$$

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 19 = -8 < 0 \Rightarrow$$

нет корней

Задание 20

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$$

$$20. \quad \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$$

Приведем к общему знаменателю.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{1 - 3x - 4x^2}{x^2} = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 \neq 0 \\ x \neq 0$$

$$-4x^2 - 3x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - 5}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: -1; 0,25.

Задание 20

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$$

№20.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$$

$$\frac{1}{x} = t$$

Метод введения новой переменной

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0; 2 \text{ корня}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

$$\frac{1}{x} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = 4$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 0,25$$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 0,25$

Типичные ошибки и недочеты:

- Арифметические ошибки (сложение, вычитание, умножение, деление)
- Ошибки при извлечении арифметического квадратного корня
- Ошибки в формулах дискриминанта и корней квадратного уравнения
- Ошибки в применении формул сокращенного умножения
- Ошибки в преобразованиях выражений, содержащих квадратные корни
- При выборе метода решения с помощью введения новой переменной отсутствие обратной замены
- Неверное решение неполного квадратного уравнения
- Неверное приведение подобных слагаемых, перенос слагаемых
- Ошибки в определении ОДЗ
- Ошибки при выполнении разложения многочлена на множители
- Использование символики
- Запись ответа

Системные ошибки

при нахождении
дискриминанта:

$$D = 1 + 48 = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{D} = \pm 2\sqrt{7}$$

$$D = 28 \quad D = 2\sqrt{7}$$

при решении неполных
квадратных уравнений:

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400} = \pm 20$$

$$(x-4)^2 = -3$$

$$x-4 = \pm\sqrt{-3}$$

$$(x-4)^2 = 7$$

Потеря корня

$$\begin{aligned} x-4 &= \sqrt{7} \\ x &= \sqrt{7} + 4 \end{aligned}$$

Ошибки в преобразованиях выражений, содержащих
квадратные корни

$$\begin{aligned} D &= 64 - 36 = 28 \\ x_1 &= \frac{8 + \sqrt{28}}{2} = \frac{8 + \sqrt{4 \cdot 7}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{2} = 8 + \sqrt{7} \\ x_2 &= \frac{8 - \sqrt{28}}{2} = \frac{8 - \sqrt{4 \cdot 7}}{2} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2} = 8 - \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 64 - 36 = 28 \\ x_1 &= \frac{8 + \sqrt{28}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{2} - \frac{10\sqrt{7}}{2} = 5\sqrt{7} \\ x_2 &= \frac{8 - \sqrt{28}}{2} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

Ошибки при разложении на множители

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$(x^3 + 3x^2) - (x - 3) = 0$$

$$x^2(x+3) - 1(x+3) = 0$$

~~$$(x-1) = 0 \text{ или}$$~~

$$(x-1) \cdot (x^2+3) = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{или} \quad (x^2+3)=0$$

$$\underline{x=1}$$

$$x-3=0 \quad \text{или} \quad x+3=0$$

$$\underline{x=3}$$

$$\underline{x=-3}$$

Ответ: 1; 3; -3.

$$20) \quad \cancel{(x-2)^2} \quad (x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) = 0$$

$$(x-2)^4 - 3(x-2)^2 = 0$$

$$(x-2)^2(x-2-3) = 0$$

Фактические ошибки

№20

$$(x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0$$

$$\cancel{(x-4)^4} - 4 \cdot \cancel{(x-4)^2} - 21 = 0$$

$$(x-4)^2 - 4 - 21 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 4 - 21 = 0$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 64 + 36 = \sqrt{100} = 10$$

$$x_1 = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -1; 9$$

Ответ: $x = -1; 9$

Задание №20

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad | : x$$

$$x^2 + 2x - 1 - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 - 4}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ответ: $-3; 1$

Фактические ошибки

$$\sim 20) (x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0$$

$$\text{Пусть } t = (x-4)^2$$

$$t^2 - 4t - 21 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100 \quad (2 \text{ к}) > 0$$

$$t_1 = \frac{4+10}{2} = 7$$

$$x_1 = 37$$

$$(7-4)^2 = 49 - 28 + 16 = 37$$

$$t_2 = \frac{4-10}{2} = -3$$

$$x_2 = 13$$

$$(3-4)^2 = 9 - 12 + 16 = 13$$

Ответ: $-3; 7; 13; 37$.

Фактические ошибки

N 20

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{1-3x-4x^2}{x^2} = 0$$

0.03: где $x > 0$, то:

$$\frac{-4x^2-3x+1}{x^2} = 0 \quad /: (-1)$$

$$\frac{4x^2+3x-1}{x^2} = 0$$

$$4x^2+3x-1=0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$$

$$D = \sqrt{25}$$

$$\sqrt{D} = 5$$

$$x_{12} = \frac{-3 \pm 5}{8} \rightarrow x_1 = \frac{-8}{8} = -1$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{2}{8} = 0,25$$

$x = -1$ - посторонний корень, т.к. не удовлетворяет условию задачи: $x > 0$.

Ответ: $x = 0,25$.

05

Фактические ошибки

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

N20

Допишем левую часть на $\sqrt{3}$

$$(x-2)^2 + \sqrt{3} < \sqrt{3}(x-2)$$

Перенесём всё в левую часть

$$\sqrt{3}(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$20) \quad (x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) = 0$$

$$(x-2)^4 - 3(x-2)^2 = 0$$

$$(x-2)^2(x-2-3) = 0$$

Фактические ошибки

$$(x-2)^2 < \sqrt{3} (x-2)$$

$$(x-2)^2 : (x-2) < \sqrt{3}$$

$$x-2 < \sqrt{3}$$

$$x < \sqrt{3} + 2$$

$$x < \cancel{\sqrt{3}} \quad \sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; \sqrt{7})$$

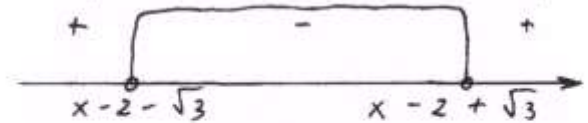
$$20. (x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$$

$$((x-2) - \sqrt{3})((x-2) + \sqrt{3}) < 0$$

$$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) < 0$$

Применим метод интервалов:



$$x \in (x-2-\sqrt{3}; x-2+\sqrt{3})$$

$$\text{Ответ: } (x-2-\sqrt{3}; x-2+\sqrt{3})$$

Задание 21

Номер задания	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания
21	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели	П

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 21

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 ч, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 6 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

Баржа прошла по течению реки 84 км и, повернув обратно, прошла еще 66 км, затратив на весь путь 10 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Моторная лодка прошла против течения реки 192 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Задание 21

Моторная лодка прошла против течения реки 192 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

21)

	$v, \text{ км/ч}$	$t, \text{ ч}$	$S, \text{ км}$
против течения	$x - 4$	$\frac{192}{x - 4}$	192
по течению	$x + 4$	$\frac{192}{x + 4}$	192

Пусть $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ - скорость лодки в неподвижной воде

Зная, что лодка затратила на путь по течению на 4 часа меньше, чем на путь против течения, составим уравнение:

$$\frac{192}{x-4} - \frac{192}{x+4} = 4$$

$$\frac{192x + 192 \cdot 4 - 192x + 192 \cdot 4 - 4x^2 + 64}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\frac{-4x^2 + 64 + 192(4+4)}{(x-4)(x+4)} = 0$$

Решите задачу.

Задание 21

Моторная лодка прошла против течения реки 192 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

$$\frac{-4x^2 + 64 + 192 \cdot 8}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\frac{-4x^2 + 8(8 + 192)}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\frac{-4x^2 + 8 \cdot 200}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\begin{cases} -4x^2 + 1600 = 0 \\ x \neq \pm 4 \end{cases}$$

$$4x^2 = 1600$$

$$x^2 = 400$$

$$x = 20$$

или

$x = -20$ - не подходит, т.к. x - скорость
($x > 0$)

Ответ: 20 км/ч

Задание 21

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 ч, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

	S	V	t
из А в В	60 км	x км/ч	$\frac{60}{x}$ ч
из В в А	60 км	x+10 км/ч	$\frac{60}{x+10}$ ч

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{x+10} + 3$$

$$60x + 600 = 60x + 3x^2 + 30x$$

$$3x^2 + 30x - 60x - 600 = 0$$

$$3x^2 + 30x - 600 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 + 10x - 200 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 100 + 800 = 900$$

$$\sqrt{D} = 30 \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 + 30}{2} = 10$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 - 30}{2} = -20 \text{ - не удовлетворяет условию}$$

...отли лист 2

✓21.

Пусть x км/ч скорость велосипедиста из А в В, тогда x+10 км/ч скорость велосипедиста из В в А. Зная, что на пути из В в А, он совершил остановку на 3 часа, составим и решим уравнение. Известно, что время, затраченное на оба пути, равно.

ОДЗ

$$x \neq 0; x \neq -10$$

$$x = 10 \text{ км/ч}$$

⇓

скорость на пути из В в А будет равна x+10 км/ч.

$$10 + 10 = 20 \text{ км/ч}$$

Ответ: 20 км/ч

Задание 21

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 6 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

Б21. Пусть x км/ч - скорость I-го автомобиля, тогда $(x+6)$ км/ч - скорость II-го автомобиля на второй половине пути.

Пусть S км - весь путь, тогда половина пути - $\frac{S}{2}$ км.

	S , км	v , км/ч	t , ч
I авт.	S	x	$\frac{S}{x}$
II авт. (I пол. п.)	$S/2$	55	$\frac{S/2}{55}$
II авт. (II пол. п.)	$S/2$	$x+6$	$\frac{S/2}{x+6}$

Зная, что I-й автомобиль прибыл одновременно со II-м автомобилем, составим и решим уравнение:

$$\frac{S}{x} = \frac{S/2}{55} + \frac{S/2}{x+6}$$

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{2 \cdot 55} + \frac{S}{2(x+6)}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2 \cdot 55} + \frac{1}{2(x+6)}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x+6+55}{2 \cdot 55(x+6)}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x+61}{110x+660}$$

$$110x + 660 = x(x+61)$$

$$110x + 660 = x^2 + 61x$$

$$-x^2 - 61x + 110x + 660 = 0$$

$$-x^2 + 49x + 660 = 0 \quad / : (-1)$$

$$x^2 - 49x - 660 = 0$$

$$D = 2401 - 4(-660) = 2401 + 2640 = 5041 (=71^2)$$

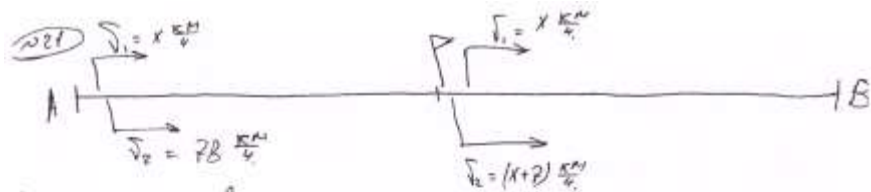
$$x_1 = \frac{49 - 71}{2} = -11, \text{ не подходит, т.к. } v \geq 0$$

$$x_2 = \frac{49 + 71}{2} = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow v \text{ 1-го автомобиля равна } 60 \text{ км/ч}$$

Ответ: 60 км/ч.

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 6 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 78 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 7 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.



1) Обозначим весь путь от А до В за S

2) ~~Так как~~ Так как второй автомобиль движется неравномерно, то мы должны найти его $v_{ср}$

$$v_{ср} = \frac{\text{пути}}{\text{время}} = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\frac{S/2}{78} + \frac{S/2}{x+7}} = \frac{S}{\frac{1}{156} + \frac{1}{2(x+7)}} = \frac{S}{\frac{156 + 2(x+7)}{312 + 2x}} = \frac{312 + 2x}{0,5x + 42,5}$$

$v_1 = 78 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$
 $t_1 = \frac{0,5S}{78}$
 $v_2 = (x+7) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$
 $t_2 = \frac{0,5S}{x+7}$

$v_{ср} = \frac{78x + 546}{0,5x + 42,5} \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$ — 2-го автомобиля

можем составить таблицу

	$x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	$\frac{S}{x} \text{ ч.}$	S
1 автомобиль	$x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	$\frac{S}{x} \text{ ч.}$	S
2 автомобиль	$\frac{78x + 546}{0,5x + 42,5} \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$	$S \cdot \frac{0,5x + 42,5}{78x + 546} \text{ ч.}$	S

Зная то, что по итогу, время затраченное на весь путь у обоих автомобилей одинаково, можем составить уравнение:

$$\frac{S}{x} = S \cdot \frac{0,5x + 42,5}{78x + 546} \quad | : S (S \neq 0)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{0,5x + 42,5}{78x + 546} \quad | \cdot x(78x + 546)$$

ОДЗ:
 $x \neq 0$
 $78x + 546 \neq 0$

$$78x + 546 = 0,5x^2 + 42,5x \quad | : 2$$

$$156x + 1092 = x^2 + 85x$$

$$x^2 - 71x - 1092 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5041 + 4368 = 9409 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{71 - 97}{2} = \frac{-26}{2} = -13 \text{ — не удовл. усл. } \# (x > 0)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{71 + 97}{2} = \frac{168}{2} = 84 \frac{\text{км}}{\text{ч.}}$$

Ответ: $84 \frac{\text{км}}{\text{ч.}}$

Задание 21

Баржа прошла по течению реки 84 км и, повернув обратно, прошла еще 66 км, затратив на весь путь 10 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

21.	$v_{\text{км/ч}}$	$S_{\text{км}}$	$t_{\text{ч}}$
баржа	x		
течение	5		
по течению	$x+5$	84	$\frac{84}{x+5}$
против течения	$x-5$	66	$\frac{66}{x-5}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{84}{x+5} \\ \frac{66}{x-5} \end{array} \right\} 10$$

$x > 5^*$ ($v_{\text{баржи}}$ должна быть больше $v_{\text{течения}}$)

Т.к. всего баржа затратила 10 часов, составим и решим уравнение

$$\frac{84}{x+5} + \frac{66}{x-5} = 10 \quad | \cdot (x+5)(x-5) \quad | x \neq -5; x \neq 5$$

$$84x - 420 + 66x + 330 = 10x^2 - 250 \quad \times$$

$$-10x^2 + 150x + 160 = 0 \quad | : 10$$

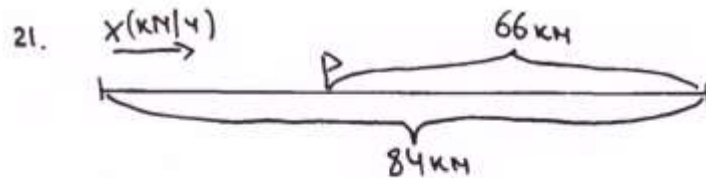
$$-x^2 + 15x + 16 = 0$$

$$D = 225 - 4 \cdot 16 \cdot (-1) = 289$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm 17}{-2} = \begin{bmatrix} -1 & - \text{не подходит} (*) \\ 16 \end{bmatrix}$$

Ответ: 16 км/ч

Баржа прошла по течению реки 84 км и, повернув обратно, прошла еще 66 км, затратив на весь путь 10 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.



Пусть x (км/ч) - собственная скорость баржи, тогда $(x+5)$ км/ч - скорость баржи по течению, а $(x-5)$ км/ч - скорость баржи против течения.

$$t_1 = \left(\frac{66}{x-5} \right) \text{ ч} - \text{против течения}$$

$$t_2 = \left(\frac{84}{x+5} \right) \text{ ч} - \text{по течению.}$$

по условию задачи $t_1 + t_2 = 10$ ч.

Составим и решим уравнение.

$$\frac{66}{x-5} + \frac{84}{x+5} = 10$$

$$\frac{66x + 330 + 84x - 420}{(x+5)(x-5)} = 10$$

$$\frac{150x - 90}{x^2 - 25} = \frac{10}{1}$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 25 \neq 0$$

$$(x+5)(x-5) \neq 0$$

$$x+5 \neq 0$$

$$x \neq -5$$

$$x-5 \neq 0$$

$$x \neq 5$$

$$150x - 90 = 10x^2 - 250$$

$$-10x^2 + 150x + 160 = 0 \quad | : (-10)$$

$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{15 - 17}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (\text{не удовлетворяет условия задачи})$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{15 + 17}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ (км/ч) - собственная скорость баржи.}$$

Ответ: 16 (км/ч) - собственная скорость баржи.

Типичные ошибки и недочеты:

- Неверно составлена математическая модель
- Арифметические ошибки (сложение, вычитание, умножение, деление)
- Ошибки при извлечении арифметического квадратного корня
- Ошибки в формулах дискриминанта и корней квадратного уравнения
- Ошибки в применении формул сокращенного умножения
- Неверное решение неполного квадратного уравнения (потеря отрицательного корня)
- Неверное приведение подобных слагаемых
- Отсутствие обоснования в выборе положительного корня
- Ошибки в определении ОДЗ
- Отсутствие единиц измерения величин (скорость, время, расстояние)
- Использование символики

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 ч, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

№21
Пусть $x = v$ из А в В

ОДЗ: $x \neq 0$

	$v, \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	t, τ	$S, \text{км}$
АВВ	x	$t+3$	60
ВВА	$x+10$	t	60

$$\frac{60(x+10)}{x+10} - \frac{60(x+10)}{x} = 3(x^2+10x)$$

$$60x - 60x + 600 = 3x^2 + 30x$$

Неверно составлена
математическая модель

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 78 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 7 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

№ 21

	$S, \text{ км}$	$v, \text{ км/ч}$	$t, \text{ ч}$
I (1 машина)	$\frac{1}{2}$	78	$\frac{1}{2 \cdot 78}$
II (2 машина)	$\frac{1}{2}$	$x + 7$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x+7}$
T_{Σ}	1	x	$\frac{1}{x}$

Ответ: 89 км/ч.

Зная что автомобилем прибыл в В одно время, составим уравнение

$$\frac{1}{2 \cdot 78} + \frac{1}{2x+14} = \frac{1}{x} \quad | \cdot x(2x+14)$$

$$\frac{2x^2 + 14x}{2 \cdot 78} - x - 2x - 14 = 0$$

$$\frac{x^2 + 7x}{78} - x - 74 = 0 \quad | \cdot 78$$

$$x^2 + 7x - 78x - 1092 = 0$$

$$x^2 - 71x - 1092 = 0$$

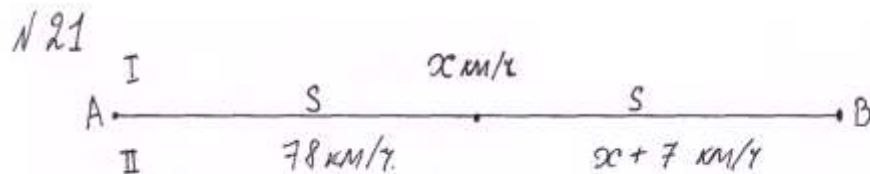
$$D = 5041 + 4368 = 9409$$

$$x_1 = \frac{71 + 97}{2} = 89$$

$$x_2 = \frac{71 - 97}{2} = -13 \leftarrow \text{не подходит скорость всегда } \geq 0$$

Фактическая ошибка

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 78 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 7 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.



- 1) Пусть половина пути равна S .
 2) Пусть скорости первого авт. равна x .

$$t = \frac{S+S}{x} = \frac{S}{78} + \frac{S}{x+7}$$

$x > 0$, тк. скорости - положительная величина.

$$\frac{2S}{x} = \frac{S}{78} + \frac{S}{x+7}$$

$$\frac{2S}{x} - \frac{S}{78} - \frac{S}{x+7} = 0$$

$$\frac{78(x+7) - x(x+7) - 78}{78x(x+7)} = 0$$

$$78x + 546 - x^2 - 7x - 78x = 0$$

$$-x^2 - 7x + 546 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + 7x - 546 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-546) = 49 + 2184 = 2233, D > 0 \text{ 4 корня.}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{2233}}{2} =$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{2233}}{2}, \text{ не удовл. усл. } x > 0$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-7 + \sqrt{2233}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 78 \\ 7 \\ \hline 546 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 546 \\ 4 \\ \hline 2184 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 2184 \\ 49 \\ \hline 2233 \end{array}$$

Задание 22

Номер задания	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания
22	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели	В

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен верно, верно найдено искомое значение параметра	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 22

Постройте график функции:

$$y = |x| \cdot (x + 1) - 3x$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?

$$y = x^2 - 7x - 5|x - 3| + 12$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком три общие точки?

$$y = \frac{(x^2 + x) \cdot |x|}{x + 1}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки?

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{при } x \geq -4, \\ x + 10 & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?

Верное построение графика включает в себя:

- масштаб,
- содержательная таблица значений функции или описание построения с помощью преобразований графиков,
- указаны координаты выколотых точек (точек разрыва, склейки)

Задание 22

$$y = |x| \cdot (x + 1) - 3x$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?

реш

$$y = |x|(x+1) - 3x$$

$$\underline{x \geq 0}$$

$$y = x(x+1) - 3x$$

$$y = x^2 + x - 3x$$

$y = x^2 - 2x$ - квадратичная функция, график - парабола, ветви вверх

Вершина: $x_0 = \frac{2}{2} = 1$ $y_0 = 1 - 2 = -1$

x	0	1	2	3	4
y	0	-1	0	3	8

$$\underline{x < 0}$$

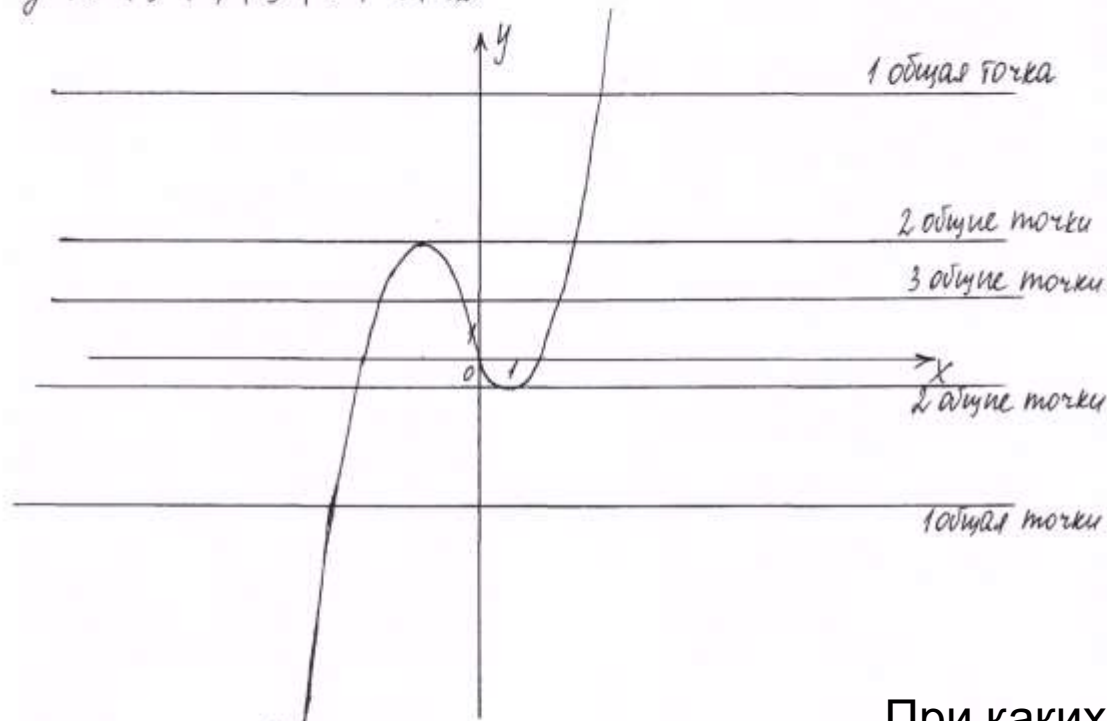
$$y = -x(x+1) - 3x$$

$$y = -x^2 - x - 3x$$

$y = -x^2 - 4x$ - квадратичная функция, график - парабола, ветви вниз.

Вершина: $x_0 = -\frac{4}{-2} = -2$ $y_0 = -4 + 8 = 4$

x	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
y	0	3	4	3	0	-5	-12



$y = m$ - прямая $\parallel OX$

при $m \in (-\infty; -1)$ - 1 общая точка

при $m = -1$ - 2 общие точки

при $m \in (-1, 4)$ - 3 общие точки

при $m = 4$ - 2 общие точки

при $m \in (4; +\infty)$ - 1 общая точка

Ответ: -1; 4

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?

Система для Бланка

$$y = |x| \cdot (x+1) - 3x$$

N22

$$y = |x| (x+1) - 3x$$

1) Если $x \geq 0$

$$y = x(x+1) - 3x$$

$$y = x^2 + x - 3x$$

$$y = x^2 - 2x \quad \text{— квадратичная функция}$$

графиком является парабола
с ветками вверх

$$x_0 = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

Вершина: $(1, -1)$

нули функции: $x^2 - 2x = 0$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

Пол. табл:

x	2	3	0	4
y	0	3	0	8

2) если $x < 0$

$$y = -x(x+1) - 3x$$

$$y = -x^2 - x - 3x$$

$$y = -x^2 - 4x \quad \text{— квадратичная функция}$$

графиком является парабола
с ветками вниз

$$x_0 = -\frac{-4}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Вершина:

$(-2, 4)$

$$y_0 = -4 - 4 \cdot (-2) = -4 + 8 = 4$$

нули функции: $-x^2 - 4x = 0$

$$-x^2 - 4x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -4$$

пол. табл

x	-1	-5	-3
y	3	-5	3

прямая $y=m$ имеет график прямой $\parallel OX$

1) прямая $y=m$ имеет с графиком $y=|x|(x+1)-3x$ при $m \in (-\infty; -1)$ - 1 общую точку

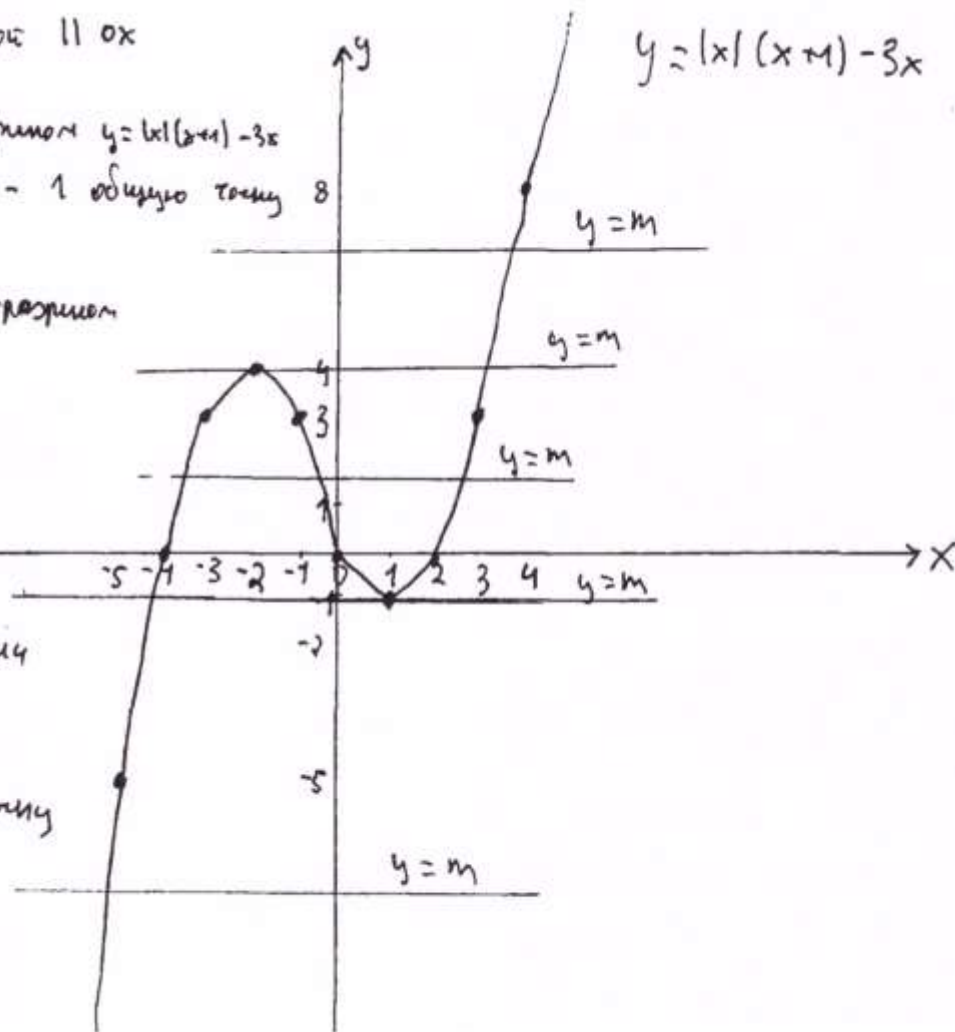
2) при $m = -1$ прямая имеет с графиком 2 общ. точки

3) при $m \in (-1; 4)$ прямая имеет с графиком 3 общ. точки

4) при $m = 4$ прямая имеет с графиком 2 общ. точки

5) при $m \in (4; +\infty)$ прямая имеет с графиком 1 общ. точку

Вывод: при $m = -1$, при $m = 4$



Задание 22

$$y = x^2 - 7x - 5|x - 3| + 12$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком три общие точки?

$$y = x^2 - 7x - 5|x - 3| + 12$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$y = x^2 - 12x + 27$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2} = 6$$

$$y_0 = 36 - 72 + 27 = -9$$

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

$$x - 3 < 0$$

$$x < 3$$

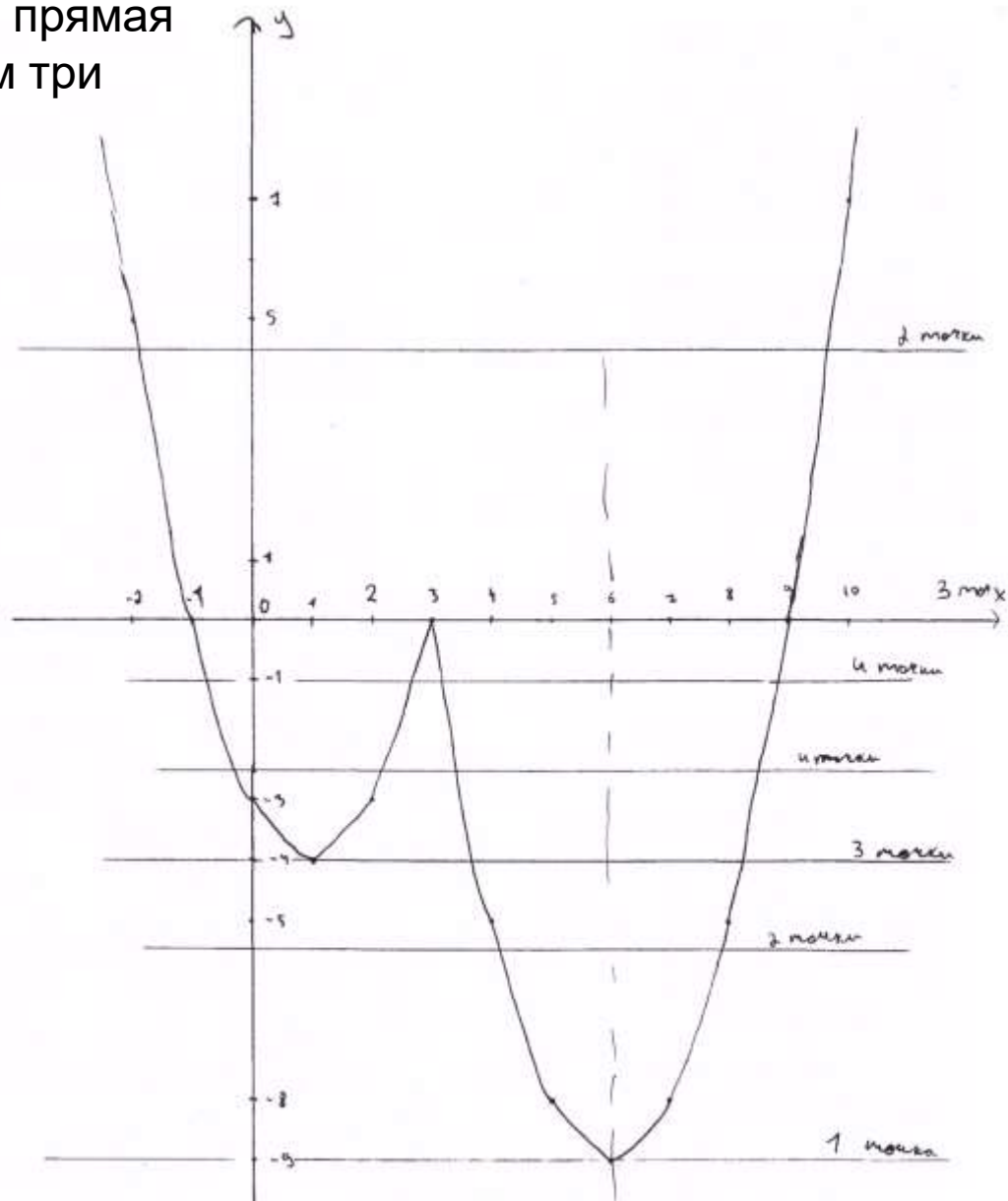
$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$$

x	3	2	1	0	-1	-2
y	0	-3	-4	-3	0	1 5

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком три общие точки?



Ответ: $m = -4$; $m = 0$

Задание 22

$$y = \frac{(x^2 + x) \cdot |x|}{x + 1}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки?

№ 22

$$y = \frac{(x^2 + x) \cdot |x|}{x + 1}; \text{ ОДЗ: } x \neq -1$$

~~Если $x < 0$, то $y = \frac{(x^2 + x) \cdot |x|}{x + 1} = \frac{x(x + 1) \cdot |x|}{x + 1} = x \cdot |x|$~~

Если $x < 0$, то $y = x \cdot (-x) = -x^2$

Если $x = 0$, то $y = x \cdot 0 = 0$

Если $x > 0$, то $y = x \cdot x = x^2$

$$y = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 0 \\ x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

1). $y = -x^2$, квадратичная функция, график - парабола.

Вершина параболы:

$$A(x; y)$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-2} = 0$$

$$y = 0^2 = 0$$

$$A(0; 0)$$

x	-4	-3	-2	-1
y	-16	-9	-4	-1

Если $x \neq -1$, то $y \neq -1$

2). $y = x^2$, квадратичная функция, график - парабола

Вершина параболы:

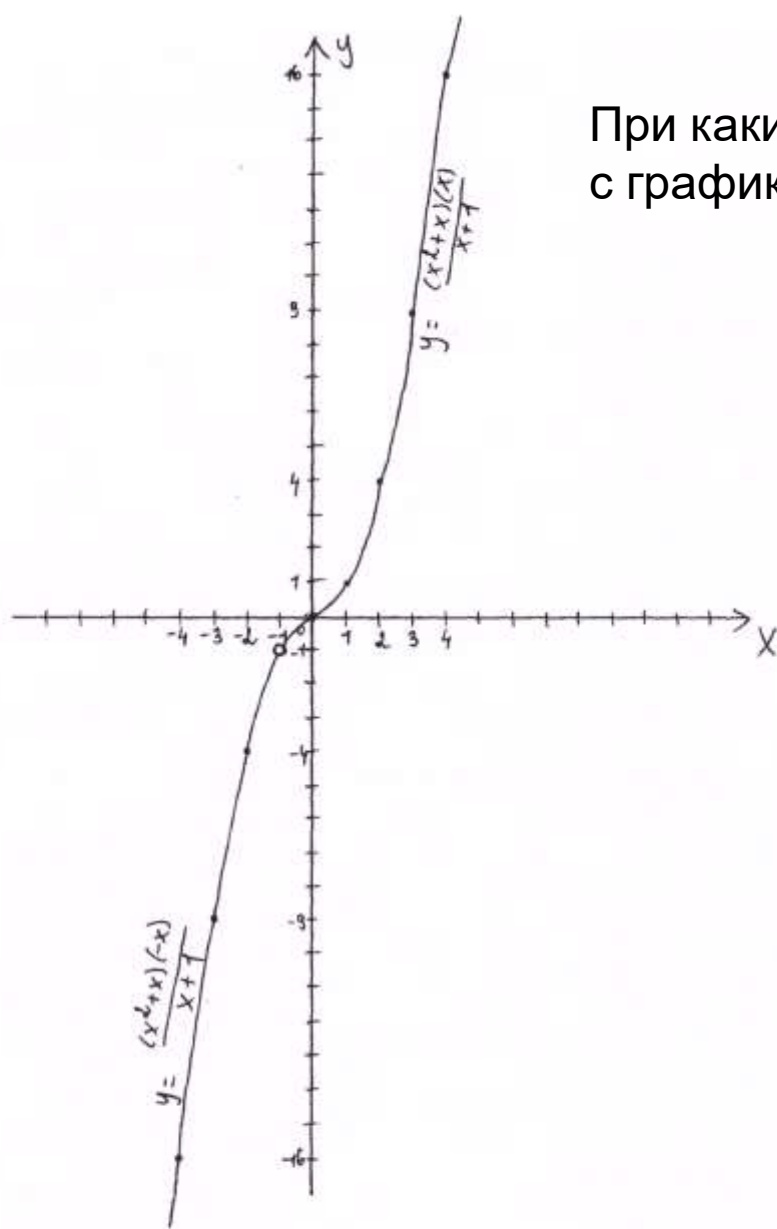
$$A(x; y)$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y = 0^2 = 0$$

$$A(0; 0)$$

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16



При каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки?

Прямая $y = m$ имеет с графиком функции
 При $m \in (-\infty; -1)$, одну общую точку;
 При $m = -1$, ни одной общей точки

При $m \in (-1; +\infty)$, одну общую точку.
 Ответ: при $m = -1$

Задание 22

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{при } x \geq -4, \\ x + 10 & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?

~ 22

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{при } x \geq -4 \\ x + 10 & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

1) $y = x^2 + 6x + 7$ — квадратичная функция, график — парабола, $a > 0$
ветви вверх

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y_0 = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 7 = 9 - 18 + 7 = -2 \quad \Rightarrow \quad (-3; -2) \text{ — вершина}$$

x	-4	-3,5	-2	-1
y	-1	-1,75	-1	2

$$y(-4) = 16 + 6 \cdot (-4) + 7 = 16 - 24 + 7 = -8 + 7 = -1$$

$$y(-3,5) = 12,25 + 6 \cdot (-3,5) + 7 = 12,25 - 21 + 7 = -8,75 + 7 = -1,75$$

$$y(-2) = 4 + 6 \cdot (-2) + 7 = 4 - 12 + 7 = -1$$

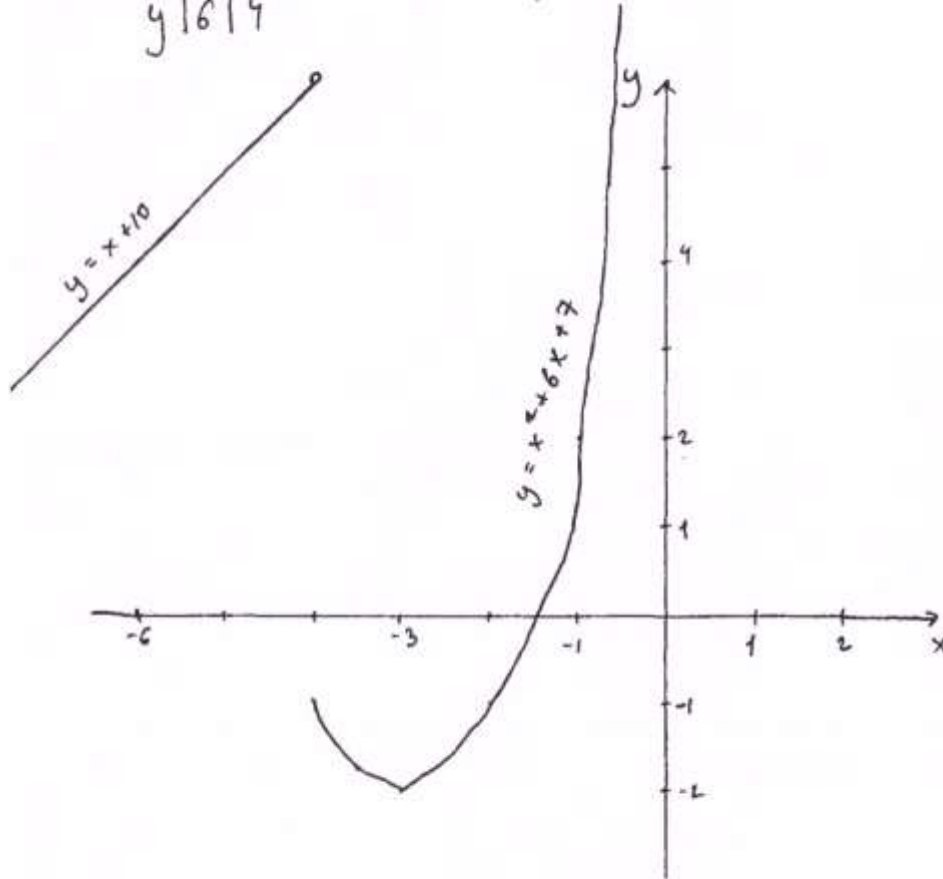
$$y(-1) = 1 - 6 + 7 = 2$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?

2) $y = x + 10$ — линейная функция, график — прямая

x	-4	-6
y	6	4

$(-4; 6)$ — выколота



$y = m$ — пучок прямых $\parallel OX$

1. $y = m$; $m < -2$ — 1 общая т.

2. $y = m$; $m = -2$ — 2 общ. т.

3. $y = m$; $-2 < m \leq -1$ — 3 общ. т.

4. $y = m$; $-1 < m < 6$ — 2 общ. т.

5) $y = m$; $m \geq 6$ — 1 общ. т.

Ответ: при $m = -2$ и при $-1 < m < 6$

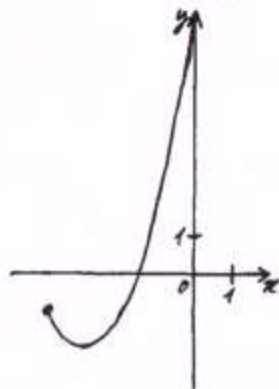
22.

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{при } x \geq -4 \\ x + 10 & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

$y = x^2 + 6x + 7$ — квадратичная функция, график параболы;

$a > 0 \Rightarrow$ ветви \uparrow , $x_0 = -\frac{b}{2} = -3$ $y_0 = (-3)^2 + 6(-3) + 7 = 9 - 18 + 7 = -2$

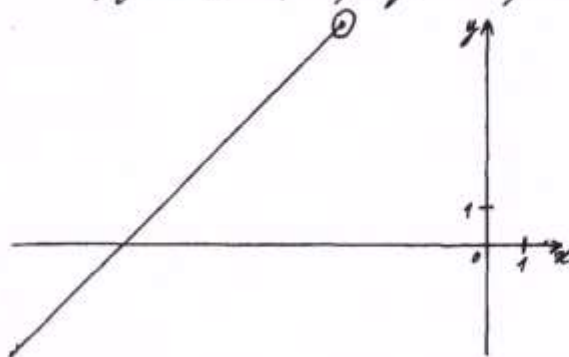
x	-4	-3	-2	-1	0
y	-1	-2	-1	2	7



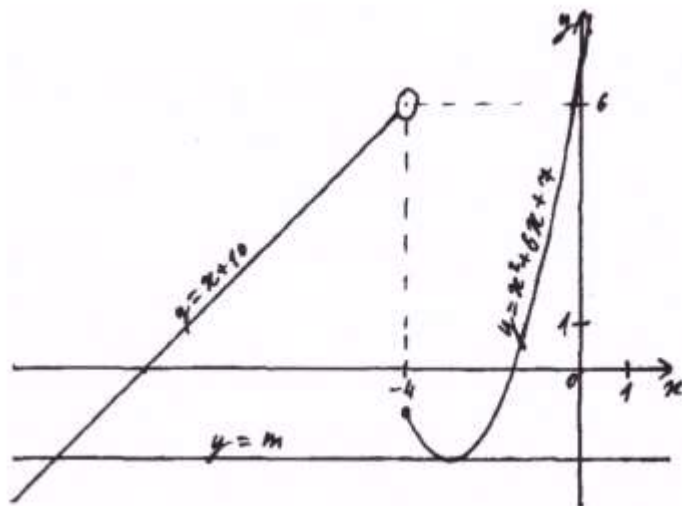
$y = x + 10$ — линейная функция, график прямой; $a > 0 \Rightarrow$ \uparrow \uparrow .

график \uparrow .

x	-4	-5
y	6	5



выберем общее решение:



$y = m$ — прямая, параллельная оси $x \Rightarrow$
 \Rightarrow она имеет с графиком 2 общие точки
 при m , равному значению y , кото-
 рому соответствуют две точки
 на графике $\Rightarrow m = -2$; $m \in (-1; 6)$.
 Ответ: при $m = -2$; $m \in (-1; 6)$.

Типичные ошибки и недочеты

- ✓ Неверные преобразования, ошибки в раскрытии модуля
- ✓ Не найдена область определения функции и соответственно неверно построен график
- ✓ При наличии выколотой точки на графике не указаны ее координаты
- ✓ Нет описания построения графика
- ✓ Ошибки в определении координат точек графика
- ✓ Ошибки в названии функции, графика
- ✓ Недостаточное количество точек для построения параболы
- ✓ График ограничен
- ✓ Нет исследования для получения искомых значений параметра, ошибки в исследовании

Вычислительные ошибки

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{при } x \geq -4 \\ x + 10 & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

1) $y = x^2 + 6x + 7$ — квадратичная функция
график параболы

x	-3	-2	-1	0	1
y	-9	-5	1	7	14
	-2	-1	2		

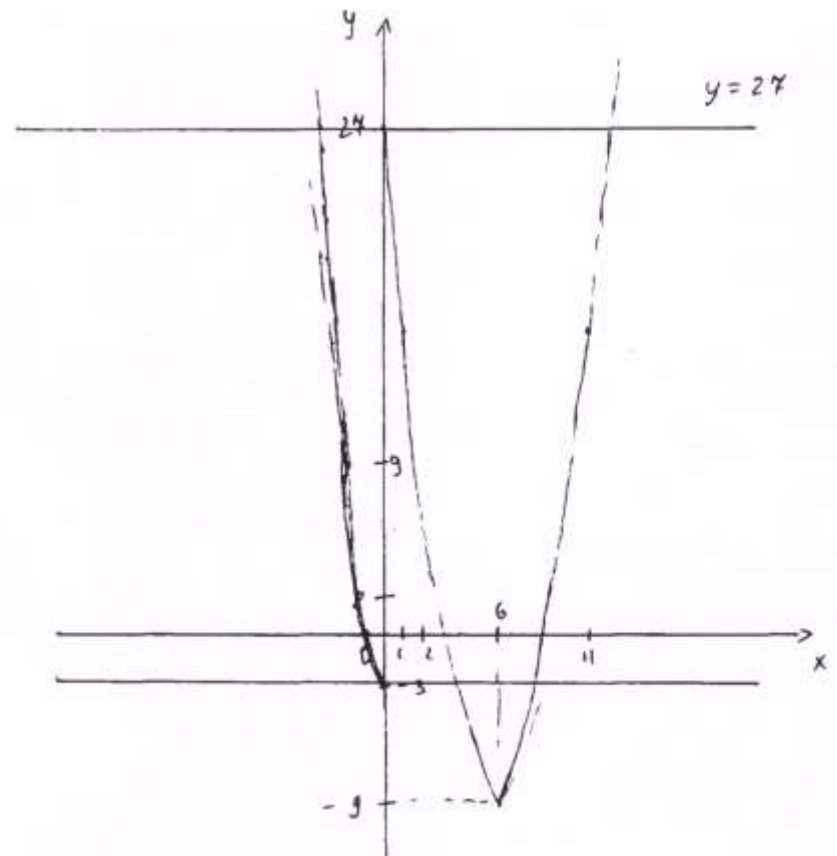
Раскрытие модуля

$$\approx 22 \quad y = x^2 - 4x - 5|x-3| + 12;$$

Эту функцию можно представить в виде кусочной функции.

$$y = \begin{cases} x^2 - 12x + 24, & \text{при } x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5x - 15 + 12, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 12x + 24, & \text{при } x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x - 3, & \text{при } x < 0 \quad (2) \end{cases}$$



Неверное построение графика

$$22. y = |x|(x+1) - 3x$$

$$\begin{array}{l} |x| \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \geq 0 \quad x < 0 \end{array}$$

$$1. x \geq 0$$

$$y = x(x+1) - 3x$$

$$y = x^2 + x - 3x \quad y = x^2 - 2x \text{ - ПАРАБОЛА, } a > 0 \text{ ветви } \text{вверх}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \quad (1; -1) \text{ - вершина}$$

$$2. y = -x(x+1) - 3x$$

$$x < 0$$

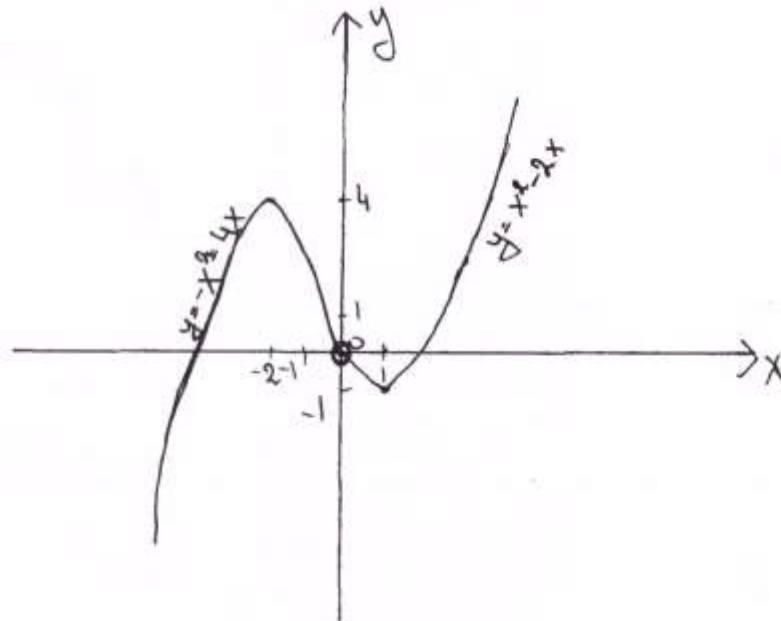
$$y = -x^2 - x - 3x$$

$$y = -x^2 - 4x \text{ ПАРАБОЛА, } a < 0, \text{ ветви } \text{вниз}$$

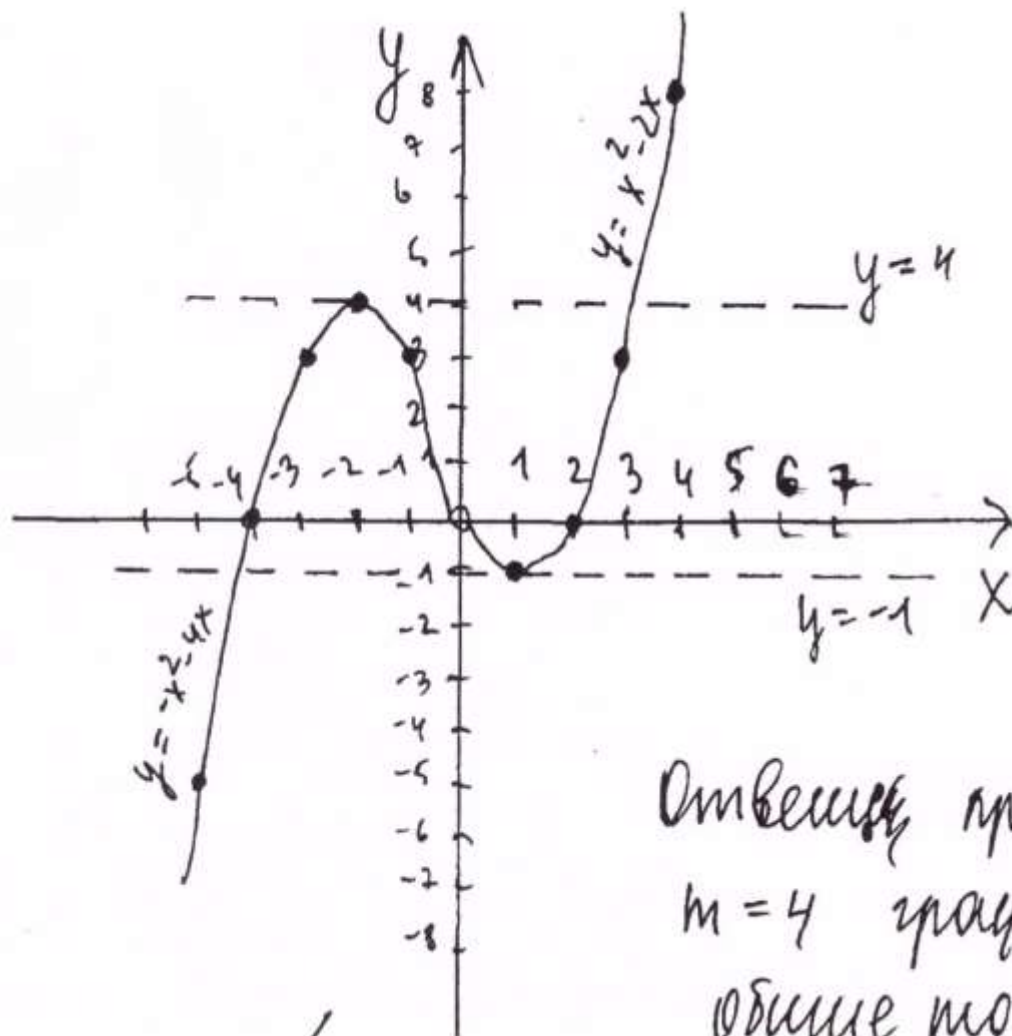
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y_0 = -(-2)^2 - 4(-2) = -4 + 8 = 4 \quad (-2; 4) \text{ - вершина}$$

$$(0; 0) \text{ - выколотая.}$$



$$\text{Отв } m = 0 \quad m = -1 \\ m = 4$$



На графике
выколота точка!

Отвешу при значениях $m = -1$ и
 $m = 4$ график имеет ровно 2
общие точки.

$$y = \frac{(x^2+x) \cdot |x|}{x+1}$$

$$y = \frac{x(x+1) \cdot |x|}{x+1}$$

$$y = x \cdot |x|$$

$$\text{D3: } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Рассмотрим 2 случая

$$1) |x| \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$y = x^2$ квадратная ф.; ветвь parabолы ↑

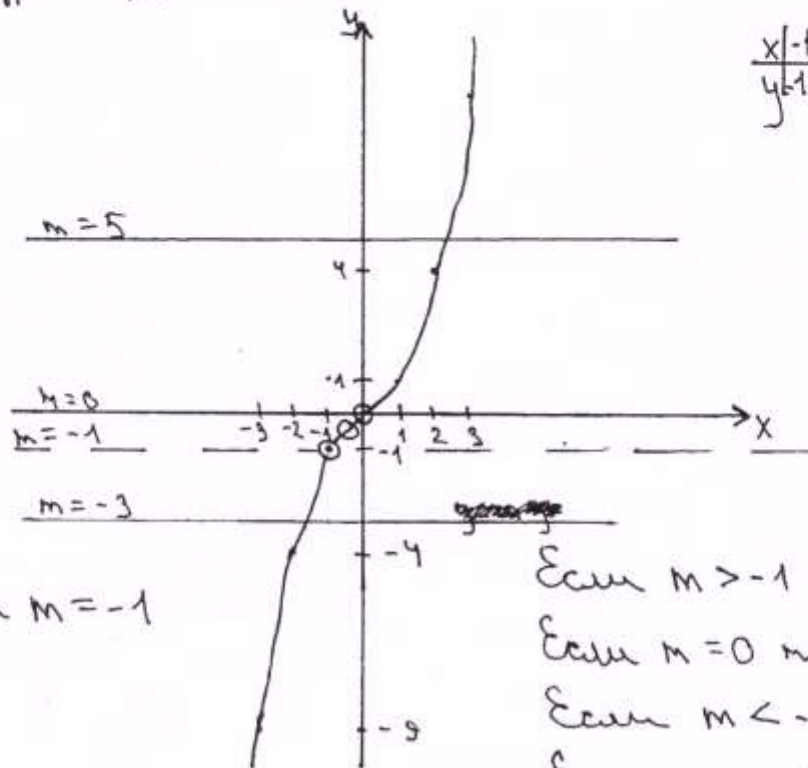
x	0	1	2
y	0	1	4

$$|x| < 0$$

$$x < 0$$

$y = -x^2$ квадратная ф.; ветвь parabолы ↓

x	-1	-2	-3
y	-1	-4	-9



На графике
выколотые точки!

Ответ: при $m = -1$

Если $m > -1$ то 1 решение

Если $m = 0$ то 1 решение

Если $m < -1$ то 1 решение

Если $m = -1$ то 0 решений

Рекомендации:

- Систематические тренинги по формированию вычислительных навыков, техники преобразований алгебраических выражений
- Работа со справочными материалами
- Отработка типологии и методологии решения уравнений и неравенств, текстовых задач
- Работа с алгоритмами исследования функций и построения их графиков
- Соблюдение единых подходов к оформлению заданий с развернутым ответом (требовательность к соблюдению математически грамотной записи решений и ответов; демонстрация образцов решения)

Задание 23

Номер задания	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания
23	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 23

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 7$, а сторона AC в 1,4 раза больше стороны BC .

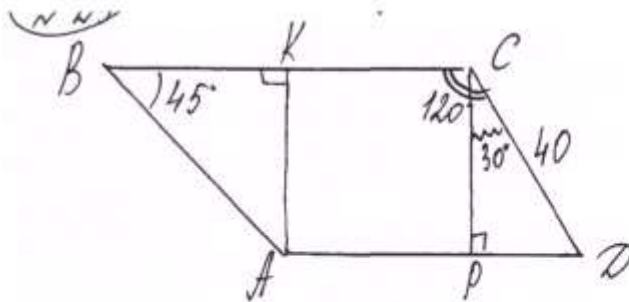
Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 20$, $AC = 35$, $NC = 39$.

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120° , $CD = 40$.

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.

Задание 23

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120° , $CD = 40$.



Найти: AB

Решение:

1) Проведем высоты AK и CP

т.к. $ABCD$ - трапеция, то $BC \parallel AD \Rightarrow AK = CP$

$$AK \perp BC \Rightarrow AK \perp AD$$

$$CP \perp AD \Rightarrow CP \perp BC$$

$$\begin{aligned} 2) \angle PCB &= 90^\circ \text{ (т.к. } CP \perp BC) \\ \angle BCD &= 120^\circ \text{ (по усл.)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle PCD = \angle BCD - \angle PCB = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

3) $\triangle PCD$ - прямоугольный

$$CP = AK = CD \cdot \cos \angle PCD = CD \cdot \cos 30^\circ = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

4) $\triangle ABK$ - прямоугольный

$$AB = \frac{AK}{\sin \angle ABK} = \frac{20\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \stackrel{(\sqrt{2})}{=} \frac{40\sqrt{6}}{2} = 20\sqrt{6}$$

Ответ: $20\sqrt{6}$

Рассмотрим $\triangle ABH$

$\angle BHA = 90^\circ$ (т.к. AH является высотой к BC) значит $\triangle ABH$ - прямоугольный

$\angle ABH = 45^\circ$ (т.к. по условию $\angle ABC = 45^\circ$, и $\angle ABH = \angle ABC$)

сумма углов треугольника $= 180^\circ$

значит $\angle BAH = 180^\circ - \angle BHA - \angle ABH$

$\angle BAH = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\angle ABH = \angle BAH = 45^\circ$ значит $\triangle ABH$ равнобедренный

значит $BH = AH$

Рассмотрим трапецию $ABCD$

$\angle HAD = 90^\circ$ (т.к. AH высота трапеции)

$\angle BAH = 45^\circ$ (ранее нашли это)

$\angle BAD = \angle BAH + \angle HAD = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

сумма углов четырехугольника $= 360^\circ$

значит $\angle CDA = 360^\circ - \angle BAD - \angle ABC - \angle BCD$

$\angle CDA = 360^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Рассмотрим $\triangle CQD$

$\angle CQD = 90^\circ$ (т.к. CQ является высотой к AD) значит $\triangle CQD$ - прямоугольный

$\angle CDQ = 60^\circ$ (т.к. ранее нашли $\angle CDA = 60^\circ$, и $\angle CDQ = \angle CDA$)

сумма углов треугольника $= 180^\circ$

значит $\angle QCD = 180^\circ - \angle CQD - \angle CDQ$

$\angle QCD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

напротив угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы

Задание 23

Дано трапеция $ABCD$
(смотри рисунок)

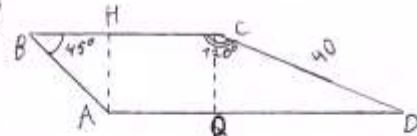
$\angle ABC = 45^\circ$

$\angle BCD = 120^\circ$

$CD = 40$

Найти AB

Решение Сделаем дополнительное построение проведем высоту AH к основанию BC , и высоту CQ к основанию AD



смотри лист 2

значит $QD = \frac{1}{2} CD$

$$QD = \frac{1}{2} 40 = 20$$

По теореме Пифагора

$$CD^2 = CQ^2 + QD^2$$

$$40^2 = CQ^2 + 20^2$$

$$CQ^2 = 1600 - 400 = 1200$$

$$CQ = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$$

Рассмотрим трапецию ABCD

Высоты трапеции, проведенные к основаниям, равны

$$\text{значит } CQ = AH = 20\sqrt{3}$$

Рассмотрим $\triangle ABH$

он является прямоугольным (ранее узнали это) с гипотенузой AB (т.к. напротив $\angle B$ ($A = 90^\circ$))

$$BH = AH \text{ (ранее выяснили это)}$$

$$BH = AH = 20\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB^2 = (20\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2 = 2400$$

$$AB = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6}$$

Ответ $AB = 20\sqrt{6}$

Проверим высоту BH

① В $\triangle HBA$.

$\angle BHA = 90^\circ$; $\angle BAH = 45^\circ = \angle ABC$ как накрест лежащие при параллельных прямых ($BC \parallel HD$) и секущей BA
 $\angle HBA = 45^\circ (180^\circ - (90^\circ + 45^\circ))$

$\Rightarrow \triangle HBA$ - равнобедренный,

Проверим высоту CH' , $\angle BCH' = 90^\circ$

② В $\triangle H'CD$.

$\angle H'CD = \angle BCD - \angle BCH' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

По св-ву прилежащих треугольников с $\angle \alpha = 30^\circ$: $HD = \frac{1}{2} CD$

(катет, лежащий против угла 30° равен $\frac{1}{2}$ от гипотенузы)

Найдем CH' по т. Пифагора:

$$CD^2 = CH'^2 + H'D^2$$

$$40^2 = CH'^2 + 20^2$$

$$CH'^2 = 40^2 - 20^2$$

$$CH'^2 = 1600 - 400$$

$$CH'^2 = 1200$$

$$CH' = \sqrt{1200}$$

$$CH' = \sqrt{400 \cdot 3}$$

$$\underline{CH' = 20\sqrt{3}}$$

③ ~~т.к.~~ $CH' = BH$ (т.к. высоты)

Т.к. $\triangle HBA$ - равнобедр.

$$HB = HA = H'C = 20\sqrt{3}$$

④ Найдем BA по т. Пифагора

$$BA^2 = BH^2 + HA^2$$

$$BA^2 = (20\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2$$

$$BA^2 = 1200 + 1200$$

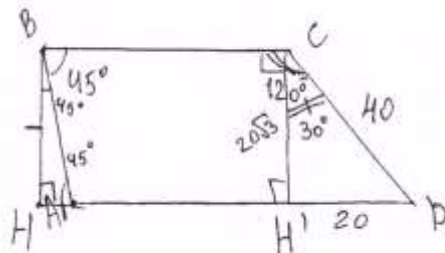
$$BA^2 = 2400$$

$$BA = \sqrt{2400}$$

$$BA = \sqrt{400 \cdot 6}$$

$$\underline{BA = 20\sqrt{6}}$$

Ответ: $BA = 20\sqrt{6}$



№ 23

Дано:

трапеция $ABCD$

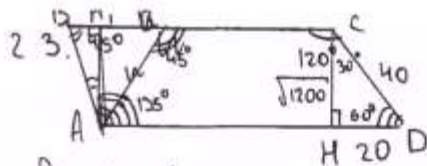
$\angle ABC = 45^\circ$

$\angle BCD = 120^\circ$

$CD = 40$

Найти AB

Решение:



Дано: $ABCD$ -трапеция; $\angle ABC = 45^\circ$; $\angle BCD = 120^\circ$; $CD = 40$

Найти: AB

Решение:

1. $\angle BCD$ и $\angle CDA$ - односторонние при \parallel прямых BC и AD (по определению трапеции) и секущей CD , следовательно, $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$ (по св.ву односторонних \angle -ов). $\Rightarrow \angle CDA = 180^\circ - \angle BCD$ по усл. $\angle BCD = 120^\circ$, значит $\angle CDA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

2. Доп. построение: высота CH .

Рассмотрим $\triangle HCD$, в нём:

1. $\angle H$ - прямой (CH - высота) $\Rightarrow \triangle HCD$ прямоугольный

2. $\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ)$ (по теореме о сумме \angle -ов \triangle -ка)
 $\angle C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

3. По св.ву прямоугол. \triangle -ка катет, лежащий против \angle -а $30^\circ = \frac{1}{2}$ гипотенузы $\Rightarrow CH = \frac{1}{2} CD$

$CD = 40$ (по усл.) $\Rightarrow CH = \frac{40}{2} = 20$

3. $\angle BAD$ и $\angle ABC$ - односторонние при \parallel пр. BC и AD и сек. AB ,
 $\Rightarrow \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$, $\angle ABC = 45^\circ$ по усл., $\angle BAD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

4. Рассмотрим $\triangle HCD$, в нём:

1. $\angle H = 90^\circ$ (CH - высота); 2. $CD = 40$ (по усл.); 3. $HD = 20$

Т.к. он прямоугольный, по теореме Пифагора $CH^2 = 40^2 - 20^2$
 (гипотенуза) (катет) (катет)
 ($a^2 = b^2 + c^2$)

$$\Rightarrow CH = \sqrt{1600 - 400} = \sqrt{1200}$$

или восп. Сланк

5. Доп. построение: высота AH ,

Рассмотрим $\triangle ABH$, в нём:

1. $\angle H$ - прямой (AH - высота); 2. $\angle ABH = 45^\circ$ (по усл.);

3. по теореме о сумме \angle -ов \triangle -ка $\angle BAH = 180^\circ - (\angle H + \angle B)$

$$\angle A = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

4. Т.к. $\angle B = \angle A = 45^\circ$, $\triangle ABH$ - равнобедренный $\Rightarrow BH = \overset{H,A}{AB}$

6. $CH = HA$ (по св.выс. высот трапеции) $\approx CH = HA = \sqrt{1200}$

7. Рассмотрим $\triangle BHA$, ~~он прямоугольный и равнобедренный~~

в нём: 1. $\angle H = 90^\circ$; 2. $HA = BH$, по $HA = \sqrt{1200} \Rightarrow$

$BH = \sqrt{1200}$. Т.к. $\triangle BHA$ - прямоугольный, по теореме

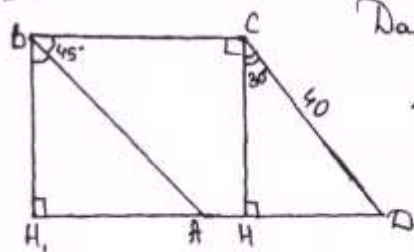
Пифагора $AB^2 = (\sqrt{1200})^2 + (\sqrt{1200})^2$

$$AB^2 = 1200 + 1200 = 2400$$

$$AB = \sqrt{2400} = \sqrt{4 \cdot 600} = 2\sqrt{600} = 2\sqrt{150 \cdot 4} = 4\sqrt{150}$$

Ответ: $4\sqrt{150}$

№ 25



Дано: трапеция $ABCD$; AD и BC - основания; $\angle B = 45^\circ$;
 $\angle C = 120^\circ$; $CD = 40$

Найти: AB

Решение: 1) Дополнительное построение: высота CH

и BH_1

2) $\angle HCD = \angle BCD - \angle BCH = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ ~~большая часть~~

3) $HD = \frac{40}{2} = 20$ (катет лежащий напротив угла 30° в 2 раза меньше гипотенузы)

4) в $\triangle CHD$: $\angle H = 90^\circ$; гипотенуза - $CD = 40$; $HD = 20$. По теореме Пифагора:

$$CH^2 = CD^2 - HD^2$$

$$CH^2 = 1600 - 400 = 1200$$

$$CH = \cancel{20\sqrt{3}} 10\sqrt{12}$$

$$CH = BH_1 = 10\sqrt{12}$$

5) в $\triangle H_1BA$: $\cos B = \frac{BH_1}{\cancel{BA} AB}$

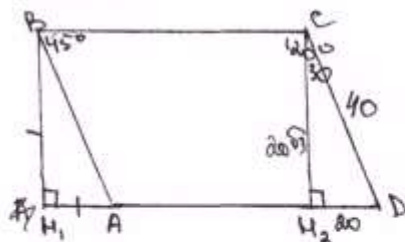
$$\cos 45^\circ = \frac{BH_1}{\cancel{BA} AB}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{12}}{AB}$$

$$AB = \frac{2 \cdot 10\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 12}{2}} = 20\sqrt{6}$$

Ответ: $20\sqrt{6}$

1523



Дано: $ABCD$ - параллелограмм

$$\angle ABC = 45^\circ$$

$$\angle BCD = 120^\circ$$

$$CD = 40$$

Найти: AB

Решение

рассмотрим $ABCD$ - ~~параллелограмм~~ параллелограмм
 BH_1 и CH_2 - высоты

↓

$$\angle BCH_1 = 90^\circ$$

$$\angle H_2CD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

напротив угла в 30° градусов лежит катет $\frac{1}{2}$ равной половине гипотенузы.

$$H_2D = \frac{40}{2} = 20$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$CH_2^2 + H_2D^2 = CD^2$$

$$CH_2^2 = CD^2 - H_2D^2$$

$$CH_2^2 = 40^2 - 20^2$$

$$CH_2^2 = 1600 - 400 = 1200$$

$$CH_2 = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$$

$$CH_2 = BH_2 = 20\sqrt{3}$$

$$\angle H_1BC = 90^\circ \Rightarrow \angle H_1BA = \angle H_1BC - \angle ABC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

рассмотрим $\triangle ABH_1$

так как сумма углов прилегающих к катетам углов 90°

↓

$$\angle H_1AB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

↓

$\triangle ABH_1$ - равнобедренный

$$AH_1 = BH_1 = CH_2 = 20\sqrt{3}$$

$$AB^2 = (20\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2$$

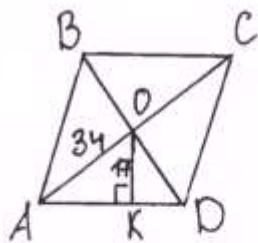
$$AB^2 = 400 \cdot 3 + 400 \cdot 3$$

$$AB^2 = 2400$$

$$AB = 20\sqrt{6}$$

Ответ: $20\sqrt{6}$

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



~23.
Дано: $ABCD$ - ромб; AC пересекается с BD
в точке O ; $OK \perp AD$; $OK = 17$; $AC = 68$
Найти: $\angle DAB$; $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle CDA$

Решение:

$AO = OC = 34$ (свойство диагоналей ромба)

Рассмотрим $\triangle AOK$. $\angle AKO = 90^\circ$, т.к. $OK \perp AD$.

$OK = 17 = \frac{1}{2} AO \Rightarrow \angle OAK = 30^\circ$ (свойство угла в 30° в прямоугольном треугольнике)

AC биссектриса $\angle DAB$ (свойство диагоналей ромба)



$$\angle DAB = 60^\circ$$

$BC \parallel AD$, AB - секущая

$\angle DAB$ и $\angle ABC$ - односторонние



$$\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ \text{ (по признаку параллельности прямых)}$$

Смотри др. бланк.

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



$$\angle ABC = 180 - 60 = 120^\circ$$

$\angle ABC = \angle CDA$ и $\angle DAB = \angle BCD$ (свойство противоположных углов параллелограмма)

$$\angle ABC = 120^\circ$$

$$\angle DAB = 60^\circ$$

$$\angle CDA = 120^\circ$$

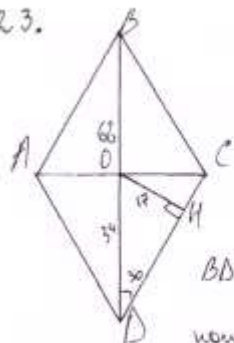
$$\angle BCD = 60^\circ$$

• Ответ: $60^\circ; 120^\circ; 60^\circ; 120^\circ$

Запись ответа



23.



Дано: $ABCD$ - ромб, BD и AC - диагонали, $BD = 68$, $BD \cap AC = O$,

$OH \perp CD$, $OH = 17$

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$

Решение:

$BD \cap AC = O \Rightarrow OD = \frac{1}{2} BD$ (т.к. диагонали ромба, пересекаясь, делятся пополам, перпендикулярны)

$$OD = \frac{1}{2} 68$$

$$OD = 34$$

Рассмотрим $\triangle OHD$, $\angle OHD = 90^\circ$

по теореме синусов: $\frac{OH}{\sin \angle HDO} = \frac{OD}{\sin \angle OHD}$

$$\sin \angle HDO = \frac{OH \sin \angle OHD}{OD}$$

$$\sin \angle HDO = \frac{17 \cdot 1}{34}$$

$$\sin \angle HDO = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle HDO = 30^\circ \text{ (т.к. } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{)}$$

$\angle D = 2 \cdot \angle HDO$ (т.к. $\angle HDO = \angle ADO$ (т.к. диагональ ромба является его биссектрисой,

$$\angle D = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

$\angle D = \angle B = 60^\circ$ (к. противоположные углы ромба)

$\angle A + \angle D = 180^\circ$ (к. одностор. углы ромба)

$$\angle A = 180^\circ - \angle D$$

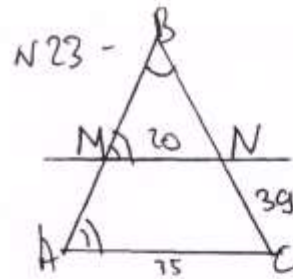
$$\angle A = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ$$

$\angle A = \angle C = 120^\circ$ (к. противоположные углы ромба)

Ответ: 120° ; 60° ; 120° ; 60° .

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 20$, $AC = 35$, $NC = 39$.



Дано: $\triangle ABC$; $MN \parallel AC$

MN - прямая, пересекает AB и BC

$MN = 20$; $AC = 35$; $NC = 39$

Найти: BN

Решение

1) $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$, в них:

$\angle B$ - общий

$MN \parallel AC$ (по условию) $\Rightarrow \angle BMN = \angle MAC$ (как соответственные при $AC \parallel MN$ секущей AM)

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBN$ (по двум углам)

2) $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN} = k$, так $BC = BN + NC$, то:

$$\frac{AC}{MN} = \frac{BN + NC}{BN} = k; \quad \frac{AC}{MN} = \frac{35}{20} = 1,75 - \text{коэффициент подобия.}$$

$$\Rightarrow \frac{BN + 39}{BN} = 1,75 \quad | \cdot BN$$

$$\frac{BN(BN + 39)}{BN} = 1,75 BN$$

$$BN + 39 = 1,75 BN$$

$$BN - 1,75 BN = -39$$

$$-0,75 BN = -39 \quad | \cdot (-1)$$

$$0,75 BN = 39 \quad | : 0,75 = \frac{39}{0,75} = \frac{3900}{75} = 52.$$

Ответ: 52

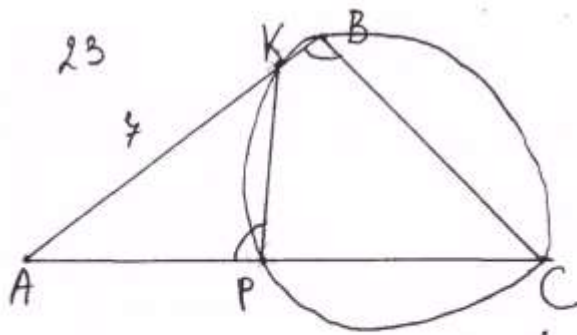
Проверка: $BC = BN + NC = 52 + 39 = 91$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BN} = \frac{91}{52} = k = 1,75$$

$$\begin{array}{r} 91 \overline{) 52} \\ \underline{52} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \overline{) 35} \\ \underline{39} \\ 0 \end{array}$$

Окружность пересекает стороны АВ и АС треугольника АВС в точках К и Р соответственно и проходит через вершины В и С. Найдите длину отрезка КР, если $AK = 7$, а сторона АС в 1,4 раза больше стороны ВС.



Дано: $\triangle ABC$, $AK = 7$, $AC = 1,4 \cdot BC$

Найти: KP

Решение:

1. $PKBC$ - впис. в окруж. \Rightarrow

$\angle KPC + \angle KBC = 180$ (св-во впис. четырех) $\Rightarrow \angle APK = \angle KBC$

2 $\angle APK + \angle KPC = 180$ (линейные).

2. Рассм. $\triangle ABC$ и $\triangle AKP$

$\angle A$ - общий

$\angle APK = \angle KBC$ (выше доказ.) $\Rightarrow \triangle AKP \sim \triangle ABC$ (по 2-м)

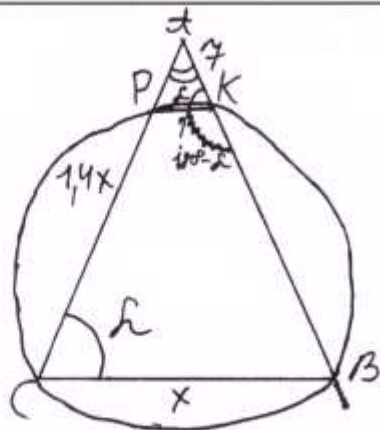
$$\frac{BC}{KP} = \frac{AC}{AK}$$

; пусть $BC = x$, тогда $AC = 1,4x$

$$KP = \frac{x \cdot 7}{1,4x} = 5$$

Ответ: $KP = 5$

23.



Найти: KP

Решение: во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° (св-во впис. четырехуг.).

Рассм. $CPKB$ - впис. четырехуг.:

пусть $\angle C = L$, тогда $\angle K = 180^\circ - L$.

$\angle PKB + \angle PKA = 180^\circ$ (сумм.), значит если $\angle PKB = 180^\circ - L$, то

$\angle PKA = L$; следовательно $\angle C = \angle PKA$

Рассм. $\triangle AKP$ и $\triangle PCB$:

1) $\angle A$ - общ.;

2) $\angle C = \angle PKA$, значит $\triangle AKP \sim \triangle PCB$ (по 2-м \angle).

$$\frac{AK}{PC} = \frac{KP}{CB} = \frac{AP}{AB}; \quad \frac{7}{14x} = \frac{KP}{x}; \quad KP = \frac{7x}{14x} = \frac{70}{14} = 5$$

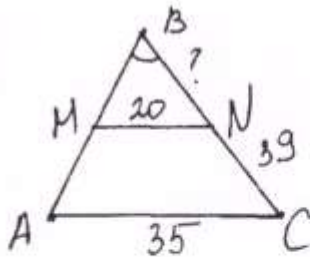
Ответ: $KP = 5$

Типичные ошибки и недочеты

- ✓ Отсутствие в обоснованиях ключевых шагов решения
- ✓ Применение при решении теоретических фактов, требующих доказательства
- ✓ Отсутствие чертежа
- ✓ Выбор неверного метода решения
- ✓ Логические ошибки в рассуждениях
- ✓ Ошибки в обозначениях углов
- ✓ Ошибки в названиях углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей
- ✓ Решена другая задача
- ✓ Задача не решена до конца (найжены не все углы)
- ✓ Вычислительные ошибки

Доказательство подобия треугольников

23.



Дано:

$$\triangle ABC, MN \parallel AC, MN = 20, AC = 35, NC = 39$$

Найти BN ?

1) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$

$$\angle B - \text{общий} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBN \quad BN = x$$

$$\frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN} = \frac{35}{20} = \frac{x + 39}{x}$$

$$35x = 20(x + 39)$$

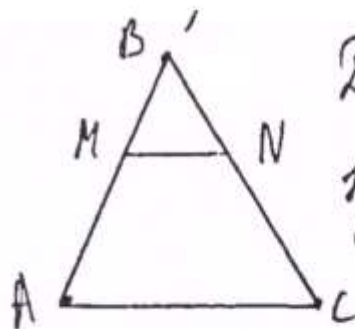
$$35x = 20x + 780$$

$$35x - 20x = 780$$

$$15x = 780 \Rightarrow x = 780 : 15 = 52$$

Ответ. $BN = 52$

Фактические ошибки



Дано: $MN \parallel AB = M$ и $MN \parallel BC = N$
 $\triangle ABC$; $MN = 20$; $AC = 35$; $NC = 39$

Найти: BN

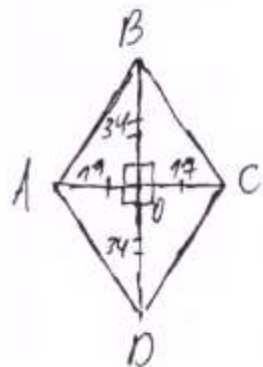
Решение: $\triangle ABC$ и $\triangle BMN$ подобны ($\angle B$ общ. и $\angle BMN = \angle MAC$) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{NC}{BC} = \frac{MN}{AC}; \frac{39}{BC} = \frac{20}{35} \Rightarrow BC = 60,25; BN = BC - NC \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } BN = 21,25 \Rightarrow BN = 60,25 - 39 = 21,25$$

СМ. ЛИСТ 2

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



№ 23

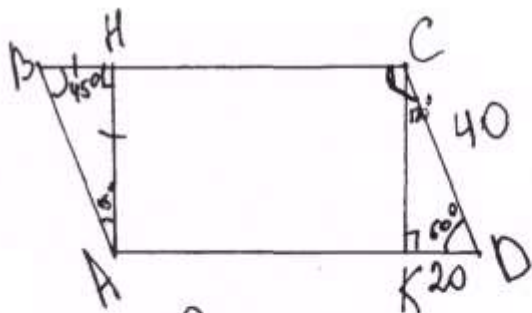
Дано: $ABCD$ - ромб; AC, BD - диаг.;
 $AC \cap BD$ в точке O ; $BD = 68$; $AO = 17$

Найти: $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle CDA$; $\angle DAB$

Решение:

Решена другая задача

24.23.



Дано: $ABCD$ трап.
 $\angle ABC = 45^\circ$; $\angle BCD = 120$
 $CD = 40$.

Найти: AD .

Решение:

1. $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$ ^{т.к. смежн.} при $BC \parallel AD$ сек CD

$$\Downarrow$$

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \angle CDA.$$

2. Дан. постро. выс. AH и CK .

3. ~~по т.~~ по т. о сумме $\angle \triangle CDK$
 $\angle DCK = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$

\Downarrow
 KD лежит против \angle в 30°

$$\Downarrow$$

$$KD = \frac{1}{2} CD = 20$$

4. Т.к. AH и CK выс. $\Rightarrow AH = CK$

$$\Downarrow$$

$$BH = KD = 20.$$

Неверный вывод

5. по т. о сумме \angle $\triangle BHA$

$$\angle HAB = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$$



$$\triangle BHA - \text{р/б} \Rightarrow BH = AH$$

6. по т. Пиф.

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$$

$$AB^2 = 400 + 400$$

$$AB^2 = 800$$

$$AB = \sqrt{800}$$

Задание 24

Номер задания	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания
24	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения	П

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 24

Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Точка M – середина стороны AD . Докажите, что BM – биссектриса угла ABC .

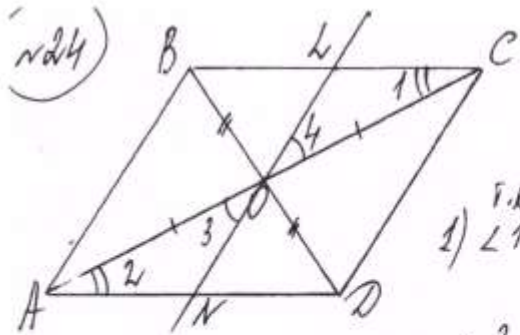
Биссектриса углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K , лежащей на стороне BC . Докажите, что K – середина BC .

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 32, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Задание 24

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.



Дано: $CL = AN$

Доказательство:

т.к. $ABCD$ - параллелограмм, то $BC \parallel AD$
1) $\angle 1 = \angle 2$ - ~~н.д.~~ ~~при~~ накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC

$\angle 3 = \angle 4$ - ~~накрест~~ вертикальные

2) т.к. $ABCD$ - параллелограмм, то $AO = OC$

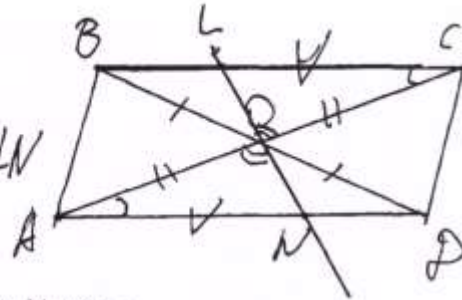
$\triangle AON = \triangle COL$ (по стороне и двум углам) $\Rightarrow AN = CL$ и т.д.

н.ч.

Дано: $ABCD$ - параллелограмм

$AC \cap BD = O$. $LN \cap BC = L$; $LN \cap AD = N$; $O \in LN$

Док-ть: $CL = AN$



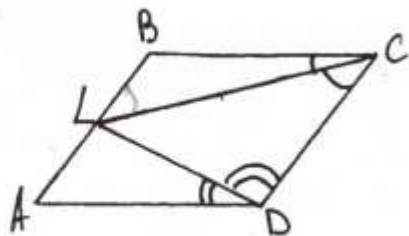
Док-во: рассмотрим $\triangle AON$ и $\triangle COL$, у них:

- 1) $AO = CO$ (знаками параллелограмма точки пересечения диагоналей являются середины);
- 2) $\angle AON = \angle COL$ (как вертикальные углы).

3) $\angle OAN = \angle LCO$ (как накрест лежащие углы при $LC \parallel AN$ и секущей AC).

Значит, $\triangle AON = \triangle COL$ по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, из равенства треугольников получаем равенство соответствующих элементов, т.е. $CL = AN$, з.т.д.

24.



Дано:

ABCD - параллелограмм

CL - бисс. $\angle C$ DL - бисс. $\angle D$ CL \cap DL = L L \in AB

Доказать: L - середина AB.

Доказательство:

1) $\angle BCL = \angle LCL$ (т.к. CL - бисс.)
 $\angle ADL = \angle CDL$ (т.к. DL - бисс.)

2) AB \parallel CD (т.к. ABCD - параллелограмм),
 CL - секущая.

значит: $\angle LCL = \angle BLC$ (как накрестлежащие)

3) Т.к. $\angle BLC = \angle LCL$, то $\angle BLC = \angle BCL \Rightarrow$
 $\triangle BCL$ - равнобедренный $\Rightarrow LB = LC$

4) AB \parallel CD (т.к. ABCD - параллелограмм)
 DL - секущая.

значит: $\angle CDL = \angle ALD$ (как накрестлежащие)

5) Т.к. $\angle ALD = \angle CDL$, то $\angle ALD = \angle ADL \Rightarrow \triangle ADL$ - равнобедренный $\Rightarrow LA = LD$

6) В параллелограмме противоположные стороны равны,
 значит $BC = AD \Rightarrow LB = LC = LD = LA$

7) $LB = LA \Rightarrow L$ - середина AB.

Биссектриса углов C и D
 параллелограмма ABCD
 пересекаются в точке L, лежащей
 на стороне AB. Докажите, что L -
 середина AB.

Ч.Т.Д.

Биссектриса углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L – середина AB.

N 24

Д-ть: L – середина AB

Д-во

1) $\angle C + \angle D = 180^\circ$, т.к. односторонние, при $BC \parallel AD$ (т.к. ABCD – параллелограмм), CD секущая $1:2$ (т.к. LD и LC – биссектрисы)

$$\frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D = \frac{1}{2} 180 \Rightarrow \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D = 90^\circ$$

2) Рассмотрим $\triangle LCD$

$$\angle L = 180 - (\angle LCD + \angle LDC) \quad \angle LCD = \frac{1}{2} \angle C \text{ так как LC – биссектриса}$$

$$\angle L = 180 - (\frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D) = 90^\circ \text{ (см. действ.) } \angle LDC = \frac{1}{2} \angle D \text{ так как LD – биссектриса}$$

$\triangle LCD$ – прямоугольный

3) Дополнительное построение: LK – перпендикуляр $LK \perp AB, LK \perp CD$

4) Рассмотрим $\triangle LKD$ - прямоугольный

$$\angle KLD = 90 - \angle LDC (= \frac{1}{2}\angle D) = \angle LCD (= \frac{1}{2}\angle C) \text{ по т. о. сумме } \angle \text{ в } \triangle \text{ прямоугольн}$$

5) Рассмотрим $\triangle LKC$ - прямоугольный

$$\angle KLC = 90 - \angle LCD (= \frac{1}{2}\angle C) = \angle LDC (= \frac{1}{2}\angle D) \text{ по т. о. сумме } \angle \text{ в } \triangle \text{ прямоугольн}$$

нов \triangle

$$6) \angle DLA = 90 - \angle KLD (= \angle LCD) = \angle LDC$$

$$\angle DLA = \angle LDC = \angle LDA \text{ так как } LD - \text{биссектриса}$$

7) Рассмотрим $\triangle ALD$

$$\angle DLA = \angle LDA \Rightarrow \triangle ALD \text{ равнобедренный} \Rightarrow AL = AD$$

$$8) \angle BLC = 90 - \angle KLC (= \angle LDC) = \angle LCD$$

$$\angle BLC = \angle LCD = \angle LCB \text{ так как } LC - \text{биссектриса}$$

9) Рассмотрим $\triangle LBC$

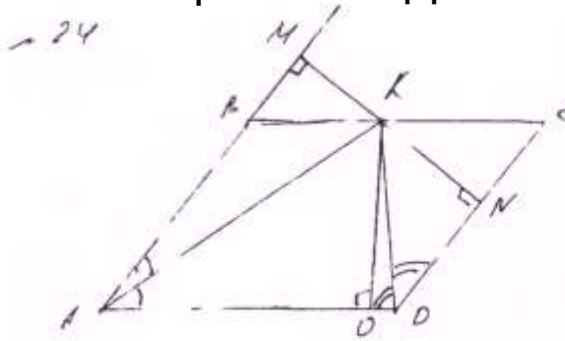
$$\angle BLC = \angle LCB \Rightarrow \triangle LBC - \text{равнобедренный} \Rightarrow LB = BC$$

$$10) AL = AD; LB = BC$$

$$AD = BC \text{ (по свойству параллелограмма)} \Rightarrow AL = LB \Rightarrow L - \text{середина } AB$$

что

Биссектриса углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K – середина BC.



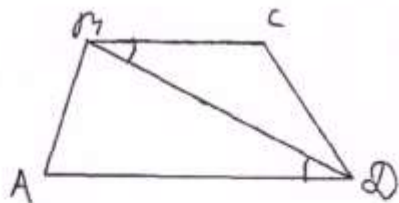
Дано: паралл. ABCD
AK и DK биссектрисы
Доказ-ть: BK = KC

Доказ-во:

1. Дополнительное построение: $KM \perp AB$, $KN \perp DC$, $KO \perp AD$
2. Т.к. AK и DK биссектрисы, то $KM = KO$ (по свойству бис-сы);
 $KN = KO$ (по свойству бис-сы), следовательно $KN = KM$;
 $AB = CD$ (по свойству паралл-ма)
3. $S_{ABK} = AB \cdot KM \cdot \frac{1}{2}$, $S_{KCD} = CD \cdot KN \cdot \frac{1}{2}$, $S_{ABK} = S_{KCD}$;

С другой стороны, $S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot KO$, $S_{KCD} = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot KO$,
 ✓ Так как $S_{ABK} = S_{KCD}$, то $\frac{1}{2} \cdot BK \cdot KO = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot KO$,
 $BK = KC$, следовательно K – середина BC
 что и требовалось доказать

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 32, $BD = 16$.
Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



№ 24
Дано. $ABCD$ - трапеция
 $BC = 8$; $AD = 32$; $BD = 16$

Доказ: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Доказательство.

1. Дано. $ABCD$ - трапеция $\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow \angle CBD$ и $\angle BDA$
- \angle ы при пересек $BD \Rightarrow \angle CBD = \angle BDA$ при пересек BD
(\angle ы при пересек равны)

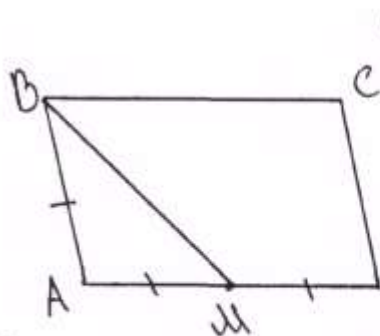
2. Дано. $\triangle CBD$ и $\triangle BDA$; $\angle CBD = \angle BDA$ (п. 1)

$$\frac{BC}{BD} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}; \quad \frac{BD}{AD} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по отношению двух сторон и угла между ними).

Что и требовалось доказать. \square

Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка M – середина стороны AD. Докажите, что BM – биссектриса угла ABC.



Задача 24.

Дано: ABCD – параллелограмм, $AD = 2AB$,
т.М – середина стороны AD.

Доказать: BM – биссектриса $\angle ABC$.

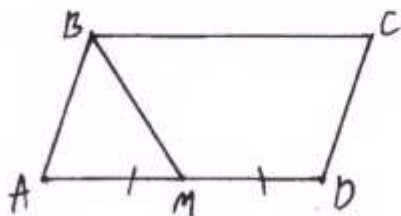
Доказательство:

- 1). $AM = MD = AB$ (т.к. М – середина AD, а $AD = 2AB$).
- 2). $\angle ~~CBM~~ CBM = \angle BMA$ (как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BM).
- 3). $\triangle ABM$ – равнобедренный ($AB = AM$)
 \Downarrow
 $\angle BMA = \angle ABM$ (т.к. в \triangle углы при основании равны).
 \Downarrow
 $\angle ABM = \angle MBC$
 \Downarrow
BM – биссектриса.

Что и требовалось доказать.

Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка M – середина стороны AD. Докажите, что BM – биссектриса угла ABC.

№ 24



Дано:

ABCD – параллелограмм
 $AB = \frac{1}{2} AD$

M – ср. AD

Доказать:

BM – дмс. $\angle ABC$

Решение: Т.к. $AB = \frac{1}{2} AD$ и $AM = \frac{1}{2} AD \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AM$, тогда $\triangle ABM$ – равнобедр. $\Rightarrow \angle ABM = \angle AMB$

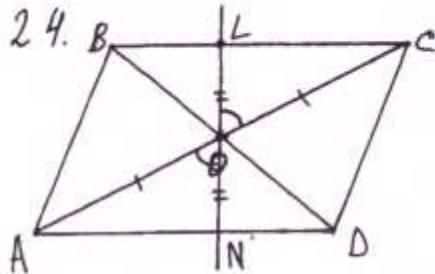
$\angle AMB = \angle MBC$ (накрест лежа. при $BC \parallel AD$, при секущ. BM), тогда

$\angle ABM = \angle MBC$, тогда BM – биссектриса $\angle ABC$. \square

Типичные ошибки и недочеты

- ✓ Отсутствие в обоснованиях ключевых шагов решения
- ✓ Неточные ссылки на обоснование
- ✓ Логически неверные рассуждения, ошибочные заключения
- ✓ Отсутствие чертежа
- ✓ Выбор неверного метода решения
- ✓ Решена другая задача
- ✓ Задача не решена до конца

Отсутствие в обоснованиях ключевых шагов решения



Дано: $ABCD$ - параллелограмм,

O - точка пересечения

Доказать: $CL = AN$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle AON$ и $\triangle COL$

1) $AO = OC$ (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам)

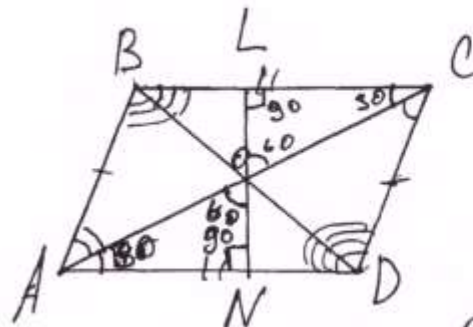
2) $LO = ON$

3) $\angle AON = \angle LOC$ (вертикальные)

Значит $\triangle AON = \triangle COL$ (по двум равным сторонам и углу между ними).
СМОТРИ ВОПРОС. ДИАГОНАЛИ

Из равенства треугольников следует, что $CL = AN$.

В решении используются несуществующие данные!



№ 24

Дано: параллельно $AB \parallel CD$

Прямая LN

Доказано: $CL \sim AN$

Доказательство

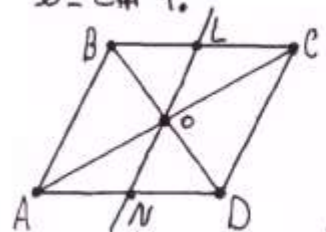
$\angle C = \angle A = 60^\circ$, по опред. параллели

$\angle B = \angle D = 120^\circ$, по опред. параллели.

$\angle OLC = \angle ~~ON~~ ANO = 90^\circ$ по усл.

$\angle AON = \angle LOC = ~~180~~ (90 + 60) = 150^\circ$ (как смежные углы).

$\angle = 2 \angle$



Дано:
 $ABCD$ - параллелограмм

Доказ-ть:
 $LO = ON$

1) $BO = OD \Leftarrow$ в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам

2) $\triangle BLO$ и $\triangle DNO$

1) $\angle LBO$ и $\angle NDO$ - накрест лежащие

2) $BO = OD$

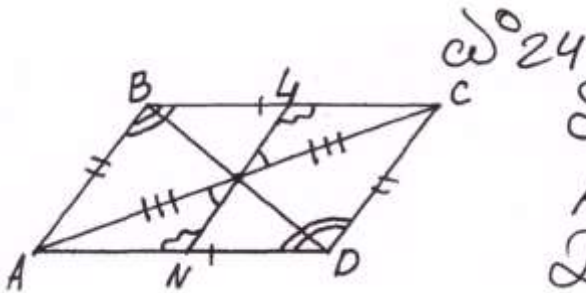
3) $\angle PON$ и $\angle BOL$ - вертикальные

$\Rightarrow \triangle BLO = \triangle DNO$

по 2 углам и стороне между ними

Доказательство не доведено
до конца!

Фактическая ошибка



Дано:
 $ABCD$ - паралл.
Доказать: $CL = AN$

Доказательство:

1) рассмотрим $\triangle AON$ и $\triangle OLC$

$AO = OC$ ($ABCD$ - паралл.)

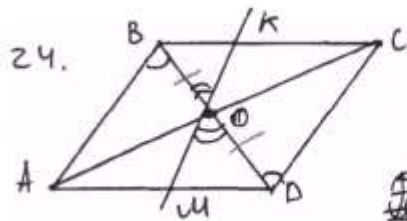
$\angle AON = \angle LOC$ (верт)

$\angle OLC = \angle ANO$ (н/н при
 $AD \parallel BC$ и LN -сечущ.)

$\Rightarrow \triangle ANO = \triangle OLC$
(по 1 и 2),
значит
 $AN = LC$

Применение
признака
равенства
треугольников

Ч. Т. Д.



Дано: $ABCD$ - параллелограмм

Д-ть: $BK = MD$

~~Дано~~ Док-во:

Проведем диагонали AC и BD .

1. ~~$\angle CDO = \angle ABO$~~ $\angle CDO = \angle ABO$ (накрест лежащие при параллельных прямых DC и AB и секущей AC)

2. $\angle BOK = \angle MOD$ (как вертикальные)

3. $BO = OD$ (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам)

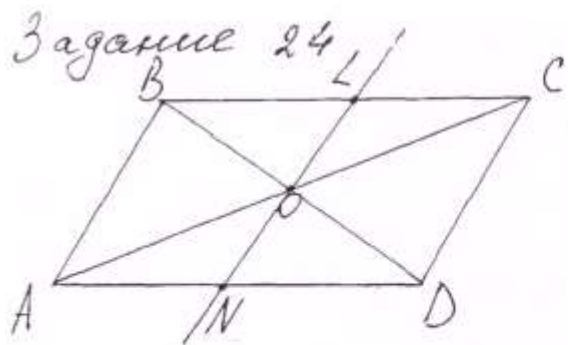
След, $\triangle BKO = \triangle MOD$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

След, $BK = MD$.

ч. т. д.

Ошибки в рассуждениях

Нарушена логика рассуждений



Дано: $ABCD$ - параллелограмм;
 AC, BD - диагонали;
 O - точка пересечения диагоналей;
 LN - секущая

Доказать: $CL = AN$

Доказательство: $ABCD$ - паралл-м $\Rightarrow AB = CD$ и $BC = AD$

Т.к. $CD = BA$, а $BC \parallel AD \Rightarrow LO = ON$

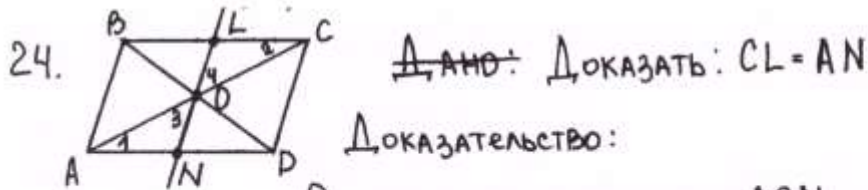
AC - диагональ, а O делит ее пополам $\Rightarrow AO = OC$

Теперь $\angle AON$ и $\angle LOC$ - они вертикальные \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle AON = \angle LOC$.

$\angle AON$ и $\angle LOC$. $LO = ON$; $AO = OC$, $\angle AON = \angle LOC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AON = \triangle LOC$ по II пр. $\Rightarrow CL = AN$

Отв. Ответ: я доказала, что $CL = AN$

Фактическая ошибка



Доказательство:

Рассмотрим треугольники AON и COL

У них:

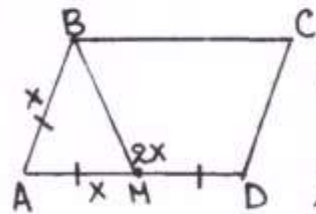
① $\angle 1 = \angle 2$ (так как они накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC)

② $\angle 3 = \angle 4$ (так как они вертикальные)

$\Delta AON \cong \Delta COL$ равны
(по двум углам)

$AN = CL$

Задача 24.



Док-во:

Пусть $AB = x$, тогда $AD = 2x$

1. $AM = MD$ (по условию) $\Rightarrow AM = MD = AD : 2 = 2x : 2 = x$
 $\Rightarrow AB = AM \Rightarrow \triangle ABM$ - равнобедренный.

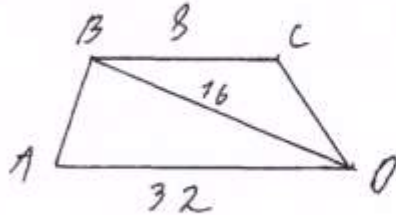
BM - биссектриса, т.к. биссектриса в параллелограмме отсекает равнобедренный треугольник.

Не доказано!

ч.т.д.

Фактическая ошибка

Задача 124



Решение

Рассмотрим $\triangle CBD$ и $\triangle BDA$

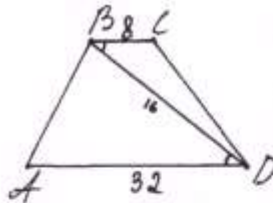
① $\angle CBD = \angle BDA$ как
накрест лежащие при
 $BC \parallel AD$ и секущей BD
по свойству трапеции

② BD общая сторона.

из ① и ② \Rightarrow что $\triangle CBD \sim$
 $\triangle BDA$ по углу и стороне
между ними!

Применение признака
подобия

№24



Дано:
трапеция $ABCD$, в ней:
 $BL=8$
 $AD=32$
 $BD=16$

~~Доказать:~~

Доказать:
 $\triangle ABD \sim \triangle BCD$

Решение:

Рассмотрим ~~трапецию ABCD~~ трапецию $ABCD$
т.к. это трапеция, то в ней $BC \parallel AD$.

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$

$BC \parallel AD$ (т.к. $ABCD$ трапеция) $\Rightarrow \angle CBD = \angle BDA$ (они равны как накрест лежащие при 2 параллельных прямых BC и AD).

Также в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ сторона BD - общая и равна 16.

Рассмотрим BC и BD , $BC=8$, а $BD=16$. и для $\triangle BCD$
 $k = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим AD и BD , $AD=32$, а $BD=16$ и для $\triangle ABD$
 $k = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ в них общий k , общая сторона BD , $\angle CBD = \angle BDA$.

\Downarrow

$\triangle ABD \sim \triangle BCD$

что и требовалось доказать.

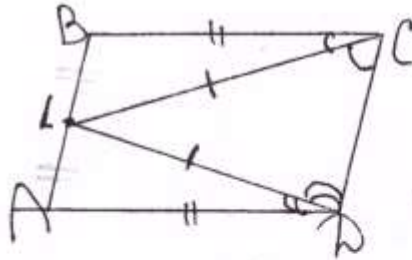
Примечание:

k - это коэффициент подобия.

Применение
признака
подобия

Фактические ошибки

√24



Дано: $ABCD$ - параллелограмм; CL - бисс
 DL - бисс

Доказать: L - середина AB

Доказательство:

1) $ABCD$ - параллелограмм \Rightarrow из определения ~~параллелограмма~~
параллелограмма $BC = AD$; $BC \parallel AD$.

2) $\angle LDA = \angle LCB$ - соотв. при $BC \parallel AD$ и сек. CD

3) III. к. $\angle LDA = \angle LDC$, $\angle BCL = \angle LCD$, $\angle LDA = \angle LCB \Rightarrow \angle LCD = \angle BCL$
 $\Rightarrow \angle CDL \Rightarrow \triangle LCD$ - равнобедр. (по св-ву равнобедр. ~~треугольника~~
треугольника) $\Rightarrow LC = LD$ - из определения равнобедр. треугольника.

4) Рассмотрим $\triangle BCL$ и $\triangle LDA$

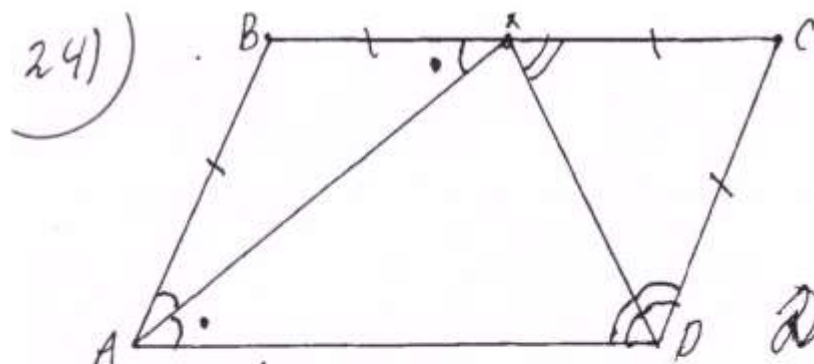
1. $AD = BC$ $\Rightarrow \triangle BCL = \triangle LDA$ (по 2-м сторонам и углу между ними);

2. $\angle LDA = \angle BCL$ $BL = LA \Rightarrow L$ - середина AB .

3. $LC = LD$ \Rightarrow Что и требовалось доказать.

Отсутствие в обоснованиях шагов решения

Применение признака
равнобедренного треугольника



Дано: $ABCD$ - параллелограмм
 AK - медиана, $\angle A$ $K \in BC$
 DK - медиана, $\angle D$

Доказать: $BK = KC$

Доказательство:
~~Решение:~~ м.к. $AD \parallel BC$ и AK - сек. $\Rightarrow \angle KAD = \angle BKA \Rightarrow \triangle ABK$ -
 р/б и $AB = BK$. м.к. $AD \parallel BC$ и DK - сек. $\Rightarrow \angle ADK = \angle CKD \Rightarrow$
 $\triangle DCK$ - р/б и $KC = CD$. м.к. $K \in BC$ и $AB = CD \Rightarrow BK = KC$.
 ч.м.д.

Задание 25

Номер задания	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания
25	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	В

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 25

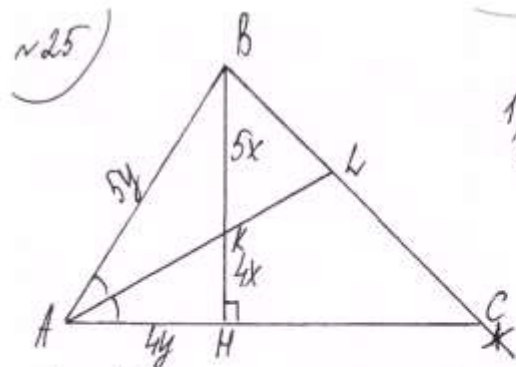
В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 28. Найдите стороны треугольника ABC .

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 6$, H – точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B , в отношении $5 : 4$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 18$.

Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $CD = 30$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причем $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B, в отношении 5 : 4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC = 18.



Найти: R - ?

1) Пусть $BK = 5x$, тогда $KH = 4x$
 $\triangle ABH$
 по св-ву бис-сы:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BK}{KH} = \frac{5x}{4x}$$

пусть $AB = 5y$, тогда $AH = 4y$

2) $\triangle ABH$ - прямоугольный

$$\sin \angle HAB = \frac{BK + KH}{AB} = \frac{5x + 4x}{5y} = \frac{9x}{5y}$$

По теор. Пифагора:

$$AH^2 + KB^2 = AB^2$$

$$16y^2 + 81x^2 = 25y^2$$

$$81x^2 = 9y^2$$

$$9x^2 = y^2$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \angle HAB = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

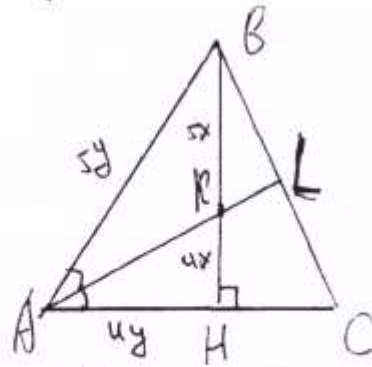
3) По теор. синусов.

$$\frac{BC}{\sin \angle HAB} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \angle HAB} = \frac{18}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{18}{\frac{6}{5}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{1} = 15$$

Ответ: 15

N25

Дано: $\triangle ABC$; AL - биссектриса;
 BH - высота; $AL \cap BH = K$. $BK:KH = 5:4$
 $BC = 18$.



Найти: R окружности, описанной около $\triangle ABC$
 Решение: рассмотрим $\triangle AKB$ ($\angle AKB = 90^\circ$, т.к. $BH \perp AC$). В нем по свойству биссектрисы AK получаем:

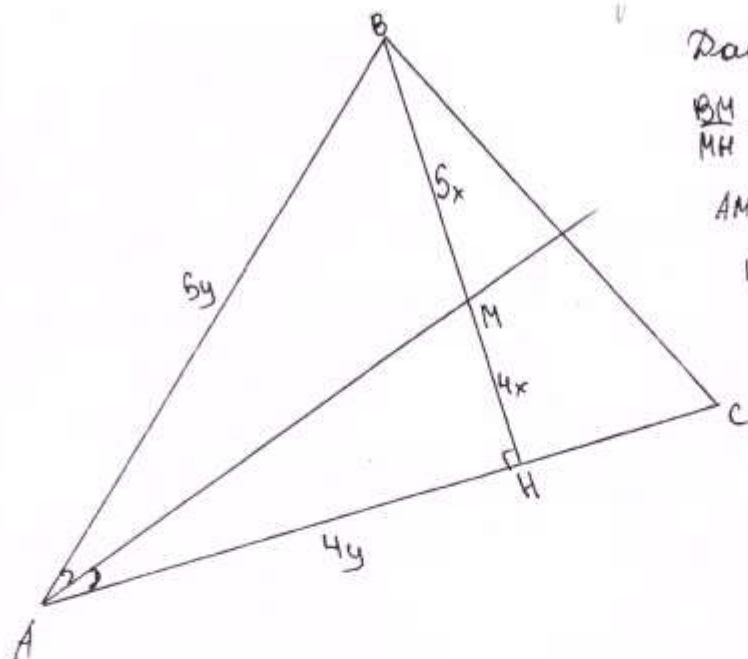
$$\frac{AB}{AK} = \frac{BK}{KH} = \frac{5}{4}; \quad \text{т.е.} \quad \frac{AB}{AK} = \frac{5}{4}; \quad \text{знаем,} \quad \frac{AK}{AB} = \frac{4}{5}. \quad \cos \angle BAK = \frac{AK}{AB} = \frac{4}{5}.$$

По основному тригонометрическому тождеству найдем $\sin \angle BAK$:
 $\sin \angle BAK = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAK} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ т.к. $\angle BAK = \angle BAC$,
 то $\sin \angle BAK = \sin \angle BAC = \frac{3}{5}$. По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R; \quad R = \frac{BC}{2 \cdot \sin \angle BAC} \Rightarrow R = \frac{18}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{18 \cdot 5}{6} = 15$$

Ответ: 15

25.



Dano:

$$\frac{BM}{MH} = \frac{5}{4}; BC = 18$$

AM - Suce., BH - bisecta
 maxim. R - ?

1) По св-ву Suce. $\frac{BM}{MH} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{5}{4}$

2) Рассм. $\triangle ABH$: BH - бисекта $\Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABH$ - прямоугольный

3) $\cos \angle BAH = \frac{AH}{AB}$, т.к. AH - проекция катета, AB - гипотенуза

$$\cos \angle BAH = \frac{4y}{5y} = \frac{4}{5}$$

4) Основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 \angle BAH + \sin^2 \angle BAH = 1$$

$$\frac{16}{25} + \sin^2 \angle BAH = 1$$

$$\sin \angle BAH = \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$$

$$\sin \angle BAH = \frac{3}{5}$$

5) По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$

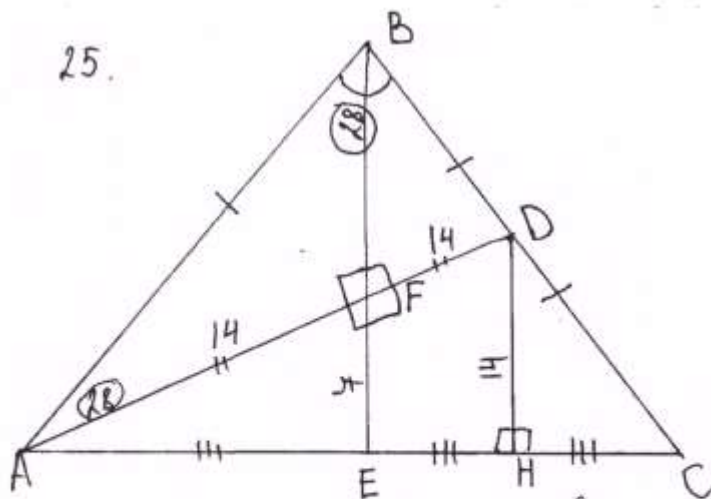
$$\angle BAC = \angle BAH, \text{ т.к. } AH \in AC \Rightarrow \sin \angle BAC = \sin \angle BAH \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{\sin \angle BAH} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAH}$$

$$R = \frac{18}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{18 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 15$$

Ответ: $R = 15$

25.



$\Rightarrow \triangle ABD$ - равноб. с основанием $AD \Rightarrow$

2. Опустим перп. DH к AC

Рассм. $\triangle EBC$

Т.к. $BD = DC \Rightarrow DH$ - ср. лин. $\triangle \Rightarrow EH = HC \quad DH = \frac{1}{2} EB = 14$

3. Рассм. $\triangle ADH$

Т.к. EF перп. к AD

$AF = FD \Rightarrow FE$ ср. лин. $\triangle \Rightarrow AE = EH \Rightarrow FE = \frac{1}{2} DH = 7$

$AE = EH = HC$

4. Рассм. $\triangle AFE$ - прямоугол.

По Тх Пифагора:

$$AE = \sqrt{49 + 196} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$$

$$AC = 3 \cdot 7\sqrt{5} = 21\sqrt{5}$$

Дано: $\triangle ABC$, AD - медиана $= 18$
 BE - биссектриса $= 28$, $AD \perp BE$
 Найти: AB, BC, AC

Решение:

1. Рассм. $\triangle ABD$.

$\left. \begin{array}{l} BF \perp AD \\ BF - \text{бисс.} \end{array} \right\} \Rightarrow BF$ - высота, бисс. \Rightarrow
 BF - медиана $AF = FD = 14$

см. гол. бланк 1.5

5 Рассм. ΔABF - прямоуго.

$$BF = 28 - 7 = 21$$

По Th. Пифагора:

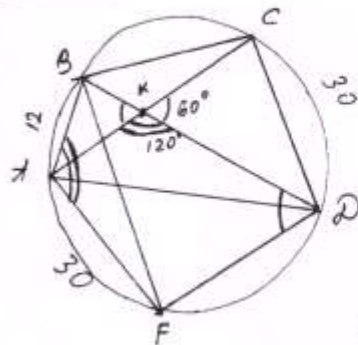
$$AB = \sqrt{441 + 196} = \sqrt{637}$$

6 ΔABC :

$$BC = 2AB = 2\sqrt{637}$$

$$\text{Итого: } AB = \sqrt{637}, BC = 2\sqrt{637}, AC = 21\sqrt{5}$$

√25



Дано: четырёхугольник ABCD вписан в окружность;

$$AB=12; CD=30; \angle AKB=60^\circ$$

Найти: R-?

Решение. проведём прямую $DF \parallel AC$
 $DF \parallel AC$, значит $\angle CDF = \angle CAF$ и соединяю-

щие их хорды, то же равны ($\angle CDF = \angle CAF$,

$$CD = AF = 30 \text{ (по усл.)}$$

$CA \parallel DF$ и KD - секущая $\Rightarrow \angle CKD = \angle KDF = 60^\circ$ (вн \angle)

четырёхугольник $ABDF$ - вписан в окружность \Rightarrow противоположные

углы в сумме 180° ($\angle BDF + \angle BAF = 180^\circ$)

$$\angle BAF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

по теореме косинусов найдём BF : $BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2 \cdot AB \cdot AF \cdot \cos \angle BAF$

$$BF^2 = 144 + 900 - 2 \cdot 12 \cdot 30 \cdot \cos 120^\circ = 1044 + 360 = 1404$$

$$BF = \sqrt{1404}$$

по теореме синусов для $\triangle BAF$ (впис. в окруж.):

$$\frac{BF}{\sin \angle BAF} = 2R; \quad \frac{\sqrt{1404}}{\sin 120^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{1404}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 13}}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{13}}{3}$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{13} = 2R$$

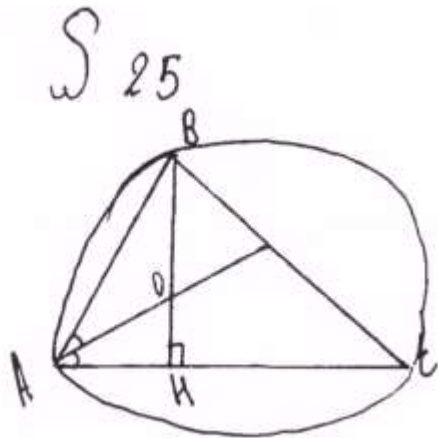
$$R = \frac{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{13}}{2} = 6\sqrt{13}$$

Ответ: $6\sqrt{13}$.

Типичные ошибки и недочеты

- ✓ Логически неверные рассуждения, ошибочные заключения
- ✓ Неточные ссылки на обоснование
- ✓ Вычислительные ошибки
- ✓ Выбор неверного метода решения
- ✓ Решена другая задача
- ✓ Задача не решена до конца

Системные ошибки



$$BO:OH = 5:4$$

$$BC = 18$$

$$R = ?$$

$$R = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{18\sqrt{3}}{3}$$

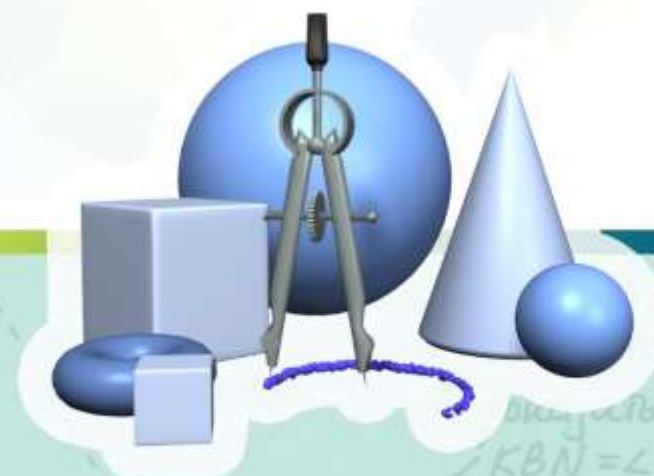
$$R = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } R = 6\sqrt{3}$$

Рекомендации:

Проведение системной работы с учащимися при изучении каждой темы по:

- овладению геометрической теоретической базой,
- отработке опорных геометрических конструкций,
- овладению типологии и методологии решения геометрических задач с построением соответствующих алгоритмов,
- формированию техники оформления заданий при проведении доказательных рассуждений,
- включению новых знаний в систему уже сформированных при изучении тем (решение задач на комбинации фигур, комбинации типов, методов, изучению нестандартных подходов и т.п.)
- Соблюдение единых подходов к оформлению заданий с развернутым ответом (требовательность к соблюдению математически грамотной записи решений и ответов; демонстрация образцов решения)



это
пар-м
окружность, это
 $\angle KBN = \angle NDK$



Докажите
1) $\square BKP$ - пар-м
2) $\angle PBK = \angle KDP$
3) $\triangle PBK = \triangle KDP$